Universität zu Köln

Mathematisches Institut

Masterarbeit

29. September 2025

D'Arcais Polynome

Tobias Krischer

betreut von
Prof. Dr. Bernhard Heim

Inhaltsverzeichnis

Notationsverzeichnis

Notation	Beschreibung
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_0$	die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ vereinigt mit $\{0\}$.
$\mathbb{R}_{>0}$	die Menge der positiven reellen Zahlen.
$\mathbb{P}$	die Menge der Primzahlen.
$\mathbb{H}$	die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
$\mathbb{F}_p$	der endliche Körper mit p Elementen. Wird synonym zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ verwendet.
$R^\times$	die Einheitengruppe eines Rings R mit 1.
e_k	die Vielfachheit des k-ten irreduziblen Faktors in einer eindeutigen Zerlegung.
ζ_m	eine m-te Einheitswurzel.
μ_m	die Menge der m-ten Einheitswurzeln.
μ	die Menge aller Einheitswurzeln.
$\sigma(k)$	die Teilersummenfunktion $\sigma(k) \coloneqq \sum_{d\mid k} d$.
$\varphi(n)$	die Eulersche φ-Funktion $\varphi(n) \coloneqq \lvert\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}\rvert$.
$Min_\alpha(X)$	das Minimalpolynom einer algebraischen Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$.
$\overline{Min_\alpha}(X)$	bezeichnet das Polynom $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$, welches für ein $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ durch Reduktion der Koeffizienten modulo n entsteht.
$A_n(z)$	die Funktion $n!P_n(z)$.
$A_n^g(z)$	die Funktion $n!P_n^g(z)$.

Einleitung

Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die Nullstellenverteilung der D'Arcais Polynome, deren Name auf den italienischen Mathematiker Francesco Flores D'Arcais (1849-1927) zurückgeht [21]. Sie sind eine Familie von Polynomen $P_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch [10, s. 446]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z}, \quad |q| < 1.$$

In der Kombinatorik werden sie Nekrasov-Okounkov-Polynome genannt [7]. Nekrasov und Okounkov entdeckten eine Formel, die von zufälligen Partitionen und der Seiberg-Witten-Theorie abgeleitet ist [24]. Han hat die Formel in Verbindung mit den Macdonald-Identitäten gebracht [7] (siehe auch Westbury [30]). Sei λ eine Partition von n mit Gewicht $|\lambda| = n$ und $\mathcal{H}(\lambda)$ die Multimenge der zu λ gehörigen Hakenlängen (hook lengths). Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Partitionen. Dann ist die Nekrasov-Okounkov-Hakenlängenformel (Nekrasov–Okounkov hook length formula) für $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} q^{|\lambda|} \prod_{h\in\mathcal{H}(\lambda)} \left(1-\frac{z}{h^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{z-1}, \quad |q| < 1.$$

Die D'Arcais Polynome können auch rekursiv definiert werden [10, s. 447]:

$$P_n(z) = \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)P_{n-k}(z), \quad P_0(z) = 1.$$

Hierbei ist $\sigma(k) := \sum_{d|k} d$ die Teilersummenfunktion. Die Schwierigkeit der Nullstellenbestimmung lässt sich bereits beim Betrachten der ersten Polynome bis $n = 10$ erahnen (vgl. [10, s. 447-448]).

$$P_0(z) = 1;$$

$$P_1(z) = z;$$

$$2!P_2(z) = z^2 + 3z = z(z+3);$$

$$3!P_3(z) = z(z^2+9z+8) = z(z+8)(z+1);$$

$$4!P_4(z) = z(z^3+18z^2+59z+42) = z(z+14)(3+z)(z+1);$$

$$5!P_5(z) = z(z^4+30z^3+215z^2+450z+144) = z(3+z)(z+6)(z^2+21z+8);$$

$$\begin{aligned} 6!P_6(z) &= z(z^5+45z^4+565z^3+2475z^2+3394z+1440) \\ &= z(z+10)(z+1)(z^3+34z^2+181z+144); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7!P_7(z) &= z(z^6+63z^5+1225z^4+9345z^3+28294z^2+30912z+5760) \\ &= z(z+8)(3+z)(z+2)(z^3+50z^2+529z+120); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8!P_8(z) &= z(z^7 + 84z^6 + 2338z^5 + 27720z^4 + 147889z^3 + 340116z^2 + 293292z + 75600) \\
&= z(z+6)(3+z)(z+1)(z^4 + 74z^3 + 1571z^2 + 9994z + 4200);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9!P_9(z) &= z^9 + 108z^8 + 4074z^7 + 69552z^6 + 579369z^5 + 2341332z^4 + 4335596z^3 \\
&\quad + 3032208z^2 + 524160z \\
&= z(z+14)(z+26)(z+4)(3+z)(z+1)(z^3 + 60z^2 + 491z + 120);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10!P_{10}(z) &= z^{10} + 135z^9 + 6630z^8 + 154350z^7 + 1857513z^6 + 11744775z^5 \\
&\quad + 38049920z^4 + 57773700z^3 + 36290736z^2 + 6531840z \\
&= z(z+1)(z^8 + 134z^7 + 6496z^6 + 147854z^5 + 1709659z^4 + 10035116z^3 \\
&\quad + 28014804z^2 + 29758896z + 6531840).
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen verteilen sich wie in Abbildung 1 zu sehen.

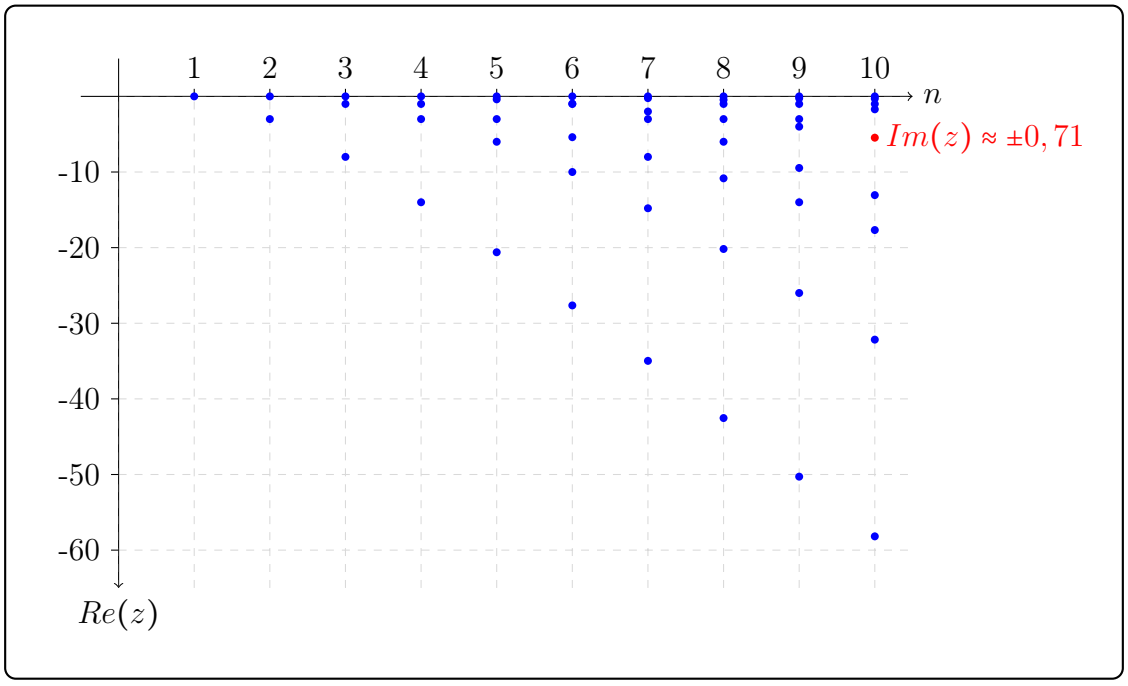

Abbildung 1: Realteile der Nullstellen von P_n bis $n = 10$. Blaue Punkte entsprechen reellen Nullstellen und rote Punkte entsprechen echt komplexen Nullstellen.

Bis $n = 4$ sind Nullstellen ausschließlich aus $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, ab $n = 5$ treten erstmals welche aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ auf und ab $n = 10$ schließlich auch welche aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Die Familie der D'Arcais Polynome besitzt interessanterweise weder Nullstellen in $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, noch in $\mathbb{N}$ und da P_n ausschließlich positive Koeffizienten hat, sind Nullstellen nie positiv (s. Abschnitt 1.3).

Die D'Arcais Polynome sind stark mit Partitionen[1] und Modulformen verknüpft,

[1] s. Definition 1.1.

weshalb ihre Untersuchung von besonderem Interesse ist. Für die Partitionsfunktion[2] gilt $p(n) = P_n(1)$ und für die berühmte Ramanujan Tau-Funktion $\tau(n) = P_{n-1}(-24)$. Es wird davon ausgegangen, dass τ keine Nullstelle besitzt (Lehmer Vermutung 1947) [22]. Der starke Bezug zu Modulformen wird durch den Zusammenhang zur Dedekindschen Etafunktion $\eta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ klar [10, s. 446]:

$$\eta(\omega)^{-z} = q^{-\frac{z}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} = q^{-\frac{z}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n, \quad q := e^{2\pi i\omega}. \tag{0.1}$$

Der n-te Fourier Koeffizient verschwindet genau dann, wenn $P_n(z) = 0$ ist. Beispielsweise findet man mithilfe von Eulers Pentagonalzahlensatz[3] und dem Jacobi-Tripelprodukt die Identitäten [10, s. 446]

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(q^{\frac{3k^2-k}{2}} + q^{\frac{3k^2+k}{2}}),\\
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-3)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)q^{\frac{k^2+k}{2}}.
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Durch Koeffizietenvergleich folgt, dass für $z = -1$ genau die Fourier Koeffizienten verschwinden, für die $n \neq \frac{3k^2\pm k}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Beispielsweise ist $P_3(-1) = 0$. Analog finden wir für $z = -3$, dass die Fourier Koeffizienten bei $n \neq \frac{k^2+k}{2}$ verschwinden, z.B. gilt $P_2(-3) = 0$. Es werden η und η^3 auch superlakunär[4] (superlacunary) genannt. Gemäß [26, s. 1023-1024] gilt für $r \in \mathbb{N}$

$$\eta^r \text{ ist superlakunär } \Leftrightarrow r \in \{1, 3\}.$$

Superlakunäre Reihen sind insbesondere lakunär[5] (lacunary). Für gerade $r \in \mathbb{N}$ bewies Serre [29]

$$\eta^r \text{ ist lakunär } \Leftrightarrow r \in \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 26\}.$$

Generell ist über das Verschwinden der Fourier Koeffizienten von η^r für $r \in \mathbb{N}$ nicht viel bekannt. Weitere Infos sind in Abschnitt 5.1 zu finden.

Im Artikel [10] von Heim, Luca und Neuhauser wird der Fall $z \in \mu$ untersucht (μ bezeichnet die Menge aller Einheitswurzeln[6]). Sie bewiesen, dass die Fourier Koeffizienten von η^{-z} für $z \in \mu \setminus \{-1, 1\}$ nie verschwinden. Ein Ziel dieser Arbeit ist es einen alternativen Beweis für dieses Resultat zu erbringen. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis.

[2] s. Definition 1.2.

[3] s. Satz 2.23.

[4] d.h. jeder Index ihrer von Null verschiedenen Fourier Koeffizienten wird durch eine (die gleiche) quadratische Formel erzeugt. Für eine rigorose Definition siehe Definition 5.2.

[5] d.h. die arithmetische Dichte der von null verschiedenen Koeffizienten ist null. Für eine rigorose Definition siehe Definition 5.1.

[6] s. Definition 2.1.

Beweisskizze

Sei $\zeta_m \in \mu \setminus \{-1, 1\}$ eine m-te Einheitswurzel. Wir nehmen $P_n(\zeta_m) = 0$ an und zeigen, dass die Voraussetzung des Satzes[a] von Dedekind-Kummer erfüllt ist. Den wenden wir an und erhalten ein Polynom $\overline{Min_{\zeta_m}} \in \mathbb{F}_p[X]$, wobei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl ist und $\overline{Min_{\zeta_m}}$ das Minimalpolynom[b] von ζ_m, dessen Koeffizienten modulo p reduziert wurden. Laut Satz besitzt dieses eine Faktorisierung

$$\overline{Min_{\zeta_m}}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschiedene irreduzible normierte Polynome sind. Sei $d_k := \deg(\overline{g_k})$ $(1 \leq k \leq r)$. Wir finden durch Untersuchung von P_n, dass $\overline{Min_{\zeta_m}}$ für $p \in \{2, 3\}$ in Linearfaktoren zerfällt[c] d.h. $d_1, \ldots, d_r = 1$ gilt. Nach dem Satz von Dedekind-Kummer stimmen außerdem $d_1, \ldots, d_r$ mit den Trägheitsgraden[d] gewisser Primideale überein. Diese Trägheitsgrade können wir durch das Zerlegungsgesetzes[e] von Primzahlen in Kreisteilungskörpern[f] abschätzen. Für $p = 2$ folgt, dass ζ_m mit $m = 2^l$, $l \in \mathbb{N}$ sein muss, damit $d_1, \ldots, d_r = 1$ erfüllt ist. Und für $p = 3$ folgt analog $m = 3^l$ oder $m = 2 \cdot 3^l$. Da sich diese Formen gegenseitig ausschließen, haben wir einen Widerspruch. Folglich ist $P_n(\zeta_m) \neq 0$ für alle $\zeta_m \in \mu \setminus \{-1, 1\}$.

[a] s. Satz 2.17 in Abschnitt 2.1
[b] s. Definition 1.33.
[c] s. Lemma 1.37.
[d] s. Definition 2.15.
[e] s. Satz 2.18 und Korollar 2.19 in Abschnitt 2.1.
[f] s. Definition 2.6.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist mithilfe des Ansatzes aus obiger Beweisskizze folgendes allgemeinere Resultat [15, s. 3] zu zeigen: Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(1) = 1$ und sei

$$P_n^g(z) := \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} g(k) P_{n-k}^g(z), \quad P_0^g(z) := 1.$$

Für $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ folgt $P_n^g(\zeta_m) \neq 0$ für alle $\zeta_m \in \mu \setminus \{-1, 1\}$. Dies ist insbesondere für $g = \sigma$ erfüllt $(P_n^\sigma = P_n)$.

Dem Leser soll zudem ein Einblick in den Forschungsstand zur Nullstellenverteilung der D'Arcais Polynome bekommen (abgedeckt durch die Abschnitte 1.3, 2.2, 3.1, 3.2 und Kapitel 4 und 5). Ferner soll die Verbindung zu anderen Themengebieten aufgezeigt werden (abgedeckt durch die Einleitung und Abschnitte 1.2, 3.3 und 5.1). Im Fazit werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit gebündelt. Diese Arbeit setzt grundlegende Kenntnisse in Analysis [18], Algebra [20] und Zahlentheorie [23] voraus. Zudem sind Kenntnisse in Funktionentheorie [6] und Modulformen [3] hilfreich. Das Lesen dieser Arbeit in der digitalen Fassung bietet den Vorteil bei Querverweisen per Klick an die Zielstelle zu springen und in Abbildungen hereinzoomen zu können. Abbildungen bleiben beim Zoomen scharf, was besonders in Kapitel 4 angenehm ist.

1 Die Partitionsfunktion und D'Arcais Polynome

In diesem Kapitel werden wir die Partitionsfunktion und die D'Arcais Polynome einführen. Die Familie der D'Arcais Polynome stellt eine Verallgemeinerung der Partitionsfunktion dar. Wir werden Eigenschaften der D'Arcais Polynome herleiten, die bei der Untersuchung ihrer Nullstellen hilfreich sind. Hierzu zählt die rekursive Formel

$$P_n(z) = \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)P_{n-k}(z), \quad P_0(z) = 1,$$

aus Abschnitt 1.2. Weiter werden wir in Abschnitt 1.3 die folgenden notwendigen Kriterien für Nullstellen α von P_n herleiten:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}, \\ &\text{(ii)} && \alpha \notin \mathbb{R}_{>0}, \\ &\text{(iii)} && P_n(\overline{\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Teil dieses Kapitels untersuchen wir $n!P_n(z)$ modulo p als Vorbereitung für den Beweis des Satzes 2.20 von Heim, Luca und Neuhauser in Kapitel 2.

1.1 Einführung der Partitionsfunktion $p(n)$

Die Definition einer Partition und der Partitionsfunktion wurden aus [1, s. 1] übernommen.

Definition 1.1. Eine *Partition* von $n \in \mathbb{N}$ ist eine endliche, nicht-wachsende Folge von natürlichen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, sodass $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i = n$ ist. Die λ_i werden *Teile* der Partition genannt.

Definition 1.2. Die *Partitionsfunktion* $p : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt für eine nicht-negative ganze Zahl n die Anzahl der Partitionen von n an, geschrieben als $p(n)$. Ein Sonderfall ist $n = 0$, wir setzen $p(0) := 1$.

Beispiel 1.3. $(1,1,1)$, $(2,1)$ und (3) sind alle Partitionen von $n = 3$, es gilt $p(3) = 3$.

Euler fand eine erzeugende Funktion für die Partitionsfunktion, welche eine wichtige Grundlage für die Theorie der Partitionen darstellt. Nachfolgender Satz stammt aus [2, s. 308] und die Beweisskizze ist eine überarbeitete Version aus meiner Bachelorarbeit, sie orientiert sich an [1, s. 3-5], [2, s. 308-309].

Satz 1.4 (**Euler**). *Sei* $|q| < 1$*, so gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}. \tag{1.1}$$

Beweisskizze. Die Beweisskizze soll die Grundidee des Beweises aufzeigen. Die Frage nach der Konvergenz, die unsere einzelnen Umformungen rechtfertigt, lassen wir vorerst beiseite. Damit beschäftigen wir uns im Anschluss im rigorosen Beweis.

Für $|q| < 1$ können wir die einzelnen Faktoren auf der rechten Seite von (1.1) als geometrische Reihe schreiben.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (q^k)^j = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q^{jk}. \tag{1.2}$$

Wenn (1.2) ausschreiben erhalten wir

$$\begin{aligned} &(1 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots) \cdot \\ &(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots) \cdot \\ &(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \cdots) \cdot \\ &\dots \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wobei der Faktor in der 1-ten Zeile $\frac{1}{1-q}$, der in der 2-ten Zeile $\frac{1}{1-q^2}$ und der in der 3-ten Zeile $\frac{1}{1-q^3}$ entspricht usw. Wir schreiben (1.3) noch etwas um, um besser zu sehen, was genau passiert.

$$\begin{aligned} &(1 + q^1 + q^{1+1} + q^{1+1+1} + \cdots) \cdot \\ &(1 + q^2 + q^{2+2} + q^{2+2+2} + \cdots) \cdot \\ &(1 + q^3 + q^{3+3} + q^{3+3+3} + \cdots) \cdot \\ &\dots \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Beim Ausmultiplizieren von (1.4), entsteht dann im Exponenten der resultierenden Summanden jeweils eine Summe, die einer Partition entspricht. Eine Ausnahme dabei ist der Summand $1 = q^0$, welcher genau 1-mal auftritt. Vernachlässigt man diesen, dann werden insgesamt genau alle möglichen Partitionen aller natürlichen Zahlen durch die Exponenten getroffen. Deshalb tritt q^n mit $n \in \mathbb{N}$ dann im ausmultiplizierten Term genau $p(n)$-mal als Summand auf, also für jede Partition von n genau 1-mal. q^0 stellt wegen $p(0) = 1$ kein Problem dar. Damit entspricht (1.4) genau $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$. □

Im rigorosen Beweis von Satz 1.4 werden wir uns der Funktionentheorie bedienen. Dazu folgen nun einige Definitionen und Sätze. Als Quelle nutzen wir [6] (außer für das Weierstraßsche Majorantenkriterium). Wir beginnen mit dem grundlegenden Begriff der komplexen Differenzierbarkeit [6, s. 35].

Definition 1.5. Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subseteq \mathbb{C},$$

heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $a \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

Dies führt uns zum zentralen Begriff der Funktionentheorie, der Holomorhpie [6, s. 45].

Definition 1.6. Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subseteq \mathbb{C} \text{ offen},$$

welche in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist, heißt *holomorph.*

Nachfolgendes Lemma zeigt eine wichtige Eigenschaft der komplexen Differenzierbarkeit [6, s. 36].

Lemma 1.7. *Die Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, seien in $a \in D$ komplex differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g; \quad \lambda f,\ \lambda \in \mathbb{C}; \quad f \cdot g \quad \textit{und} \quad \frac{1}{f},\ \textit{falls } f(a) \neq 0 \textit{ ist,}$$

in a komplex differenzierbar.

Lemma 1.7 gilt insbesondere für die Holomorphie von Funktionen. Das nächste Lemma ist im Umgang mit Polynomen sehr hilfreich [6, s. 37].

Lemma 1.8. *Jedes Polynom $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Das folgende Lemma von Abel gibt wichtigen Aufschluss über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen [6, s. 104]:

Lemma 1.9 (Abel). *Zu jeder Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

existiert ein eindeutig bestimmtes $r \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Reihe konvergiert in der offenen Kreisscheibe $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ absolut und lokal gleichmäßig (d.h. gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $B_r(0)$).

(ii) Die Reihe konvergiert für keinen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$.

Basierend auf Lemma 1.9 folgende Definition [6, s. 104]:

Definition 1.10. Die nach Lemma 1.9 eindeutig bestimmte Größe $r \in [0, \infty]$ heißt *Konvergenzradius* und die Kreisscheibe $B_r(0)$ heißt *Konvergenzkreisscheibe* der Potenzreihe. Im Fall $r = \infty$ ist $B_r(0) = \mathbb{C}$, im Falle $r = 0$ ist $B_r(0) = \varnothing$.

Aus dem Lemma von Abel ergibt sich folgendes Korollar [6, s. 105]:

Korollar 1.11. *Eine Potenzreihe stellt in ihrer Konvergenzkreisscheibe eine holomorphe Funktion dar.*

Nun zu einem zentralen Satz, dem Identitätssatz [6, s. 120]. Er wird in der Funktionentheorie häufig zur Herleitung der Gleichheit zweier Funktionen verwendet.

Satz 1.12 (Identitätssatz). *Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet $D \neq \varnothing$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $f = g$.

(ii) *Die Koinzidenzmenge* $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ *hat einen Häufungspunkt in* D.

(iii) *Es gibt einen Punkt* $z_0 \in D$ *mit* $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Nach einer Bemerkung in [6, s. 201] gilt:

Lemma 1.13. *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen, sodass*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$$

absolut konvergiert. Dann ist der Wert des Produkts genau dann von 0 *verschieden, wenn alle Faktoren* $(1 + a_k)$ *von* 0 *verschieden sind.*

Nach einer weiteren Bemerkung in [6, s. 201] gilt:

Lemma 1.14. *Sei* $D \subsetneq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge holomorpher Funktionen* $f_k : D \longrightarrow \mathbb{C}$. *Wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *absolut und gleichmäßig konvergiert, dann auch* $F(z) := \prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_k(z))$ *und weiter definiert* F *dann eine holomorphe Funktion* $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$.

Das Weierstraßschen Majorantenkriterium (vgl. [18, s. 555]) ist ein nützliches Kriterium zum Nachweis gleichmäßiger und absoluter Konvergenz einer Funktionenreihe.

Satz 1.15 (**Weierstraßsches Majorantenkriterium**). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reell- oder komplexwertiger Funktionen auf einer Menge* X. *Wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *eine Konstante* $M_n \in \mathbb{R}$ *existiert, sodass für alle* $x \in X$

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

gilt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *konvergiert, dann kovergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf X.

Mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium folgt auch absolute Konvergenz, denn wenn die Voraussetzung für $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllt ist, so ist sie dies auch für $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $g_k = |f_k|$. Nun endlich zum rigorosen Beweis von Satz 1.4. Der Beweis ist eine überarbeitete Version aus meiner Bachelorarbeit und orientiert sich an [1, s. 3-5], [2, s. 304-318] und [6, s. 104-105; s. 120].

Beweis. (Rigoroser Beweis von Satz 1.4) Für $r > 0$ definieren wir eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ durch $B_r(0) =: \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Wir betrachten q zunächst als Variable und zeigen die absolute und gleichmäßige Konvergenz von

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} \tag{1.5}$$

auf Teilmengen $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$. Wenn

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) \tag{1.6}$$

absolut und gleichmäßig auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ konvergiert, dann auch (1.5), da wir 0 als Grenzwert von (1.6) (falls vorhanden) ausschließen können. Denn für $q \in B_r(0)$ folgt wegen $r_q := |q| \leq r < 1$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für $k \geq 1$

$$|1-q^k| \geq |1-r_q^k| \geq |1-r^k| > 0$$

und damit kann 0 nach Lemma 1.13 kein Grenzwert von (1.6) sein. Sei $h_k(q) := -q^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. h_k ist als Polynom nach Lemma 1.8 insbesondere auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ holomorph. Nach Lemma 1.14 reicht es, die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} -q^k$ auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ zu zeigen, um diese für (1.6) zu zeigen und die Holomorphie von (1.6) auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ zu zeigen. Dafür nutzen wir das Weierstraßsche Majorantenkriterium (s. Satz 1.15). Sei $q \in \overline{B_r(0)} \subsetneq B_1(0)$, dann ist

$$0 \leq |-q^k| = r_q^k \leq r^k < 1.$$

Wir wählen $M_k := r^k$ als Majorante und finden mithilfe der geometrischen Reihe

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} - 1 < \infty.$$

Es folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} -q^k$ auf Teilmengen $\overline{B_r(0)} \subsetneq B_1(0)$ und damit insbesondere auf $B_r(0)$. Nach Lemma 1.14 folgt jetzt die absolute und gleichmäßige Konvergenz, sowie Holomorphie von (1.6) auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ für jedes $r < 1$. Da sich für jedes $z \in B_1(0)$ ein $r < 1$ findet, sodass $z \in B_r(0)$ ist, gilt die Holomorphie sogar auf $B_1(0)$. Da 0 kein Grenzwert von (1.6) sein kann, folgen für (1.5) ebenfalls absolute und gleichmäßige Konvergenz auf $B_r(0) \subsetneq B_1(0)$ und wegen Lemma 1.7 auch Holomorphie auf $B_1(0)$. Als Nächstes wollen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \tag{1.7}$$

zeigen. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei im nachfolgenden $0 \leq q < 1$ reell, so gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k} &= \prod_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} (q^k)^j = \prod_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} q^{jk} \\ &= \left(1 + q^1 + q^{1+1} + q^{1+1+1} + \cdots\right) \cdot \\ &\quad \cdots \\ &\quad \left(1 + q^m + q^{m+m} + q^{m+m+m} + \cdots\right).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Unsere Schritte in (1.8) sind legitim, da wir ein endliches Produkt über absolut konvergente Reihen betrachten. Wir sehen, dass die rechte Seite von (1.8) ausmultipliziert genau die Partitionen im Exponenten von q darstellt, die nur aus Teilen $\leq m$ bestehen. Sei ausschließlich für diesen Beweis $p_m(n)$ definiert als die Anzahl

der Partitionen von n, die nur aus Teilen $\leq m$ bestehen. Damit entspricht die rechte Seite von (1.8) genau $\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n$ und es folgt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n.$$

Für $n \leq m$ gilt $p_m(n) = p(n)$, da die Teile der von $p(n)$ gezählten Partitionen $\leq n \leq$ m sind. Für $m < n$ gilt allerdings $p_m(n) < p(n)$, da $p_m(n)$ nicht mehr alle Partitionen von n zählt, wie z.B. die Partition (n). Es folgt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n = \sum_{n=0}^{m} p(n)q^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m(n)q^n \geq \sum_{n=0}^{m} p(n)q^n. \tag{1.9}$$

Mit Hilfe von (1.9) und der zuvor gezeigten absoluten und gleichmäßigen Konvergenz von (1.5) finden wir

$$\sum_{n=0}^{m} p(n)q^n \leq \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k} \leq \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{1-q^k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} < \infty. \tag{1.10}$$

Es ist $0 \leq p(n)q^n$ und für q fest gewählt gilt $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \in \mathbb{R}$. Wegen (1.10) folgt deshalb mit dem Monotoniekriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ und außerdem

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \leq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}. \tag{1.11}$$

Andererseits gilt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n. \tag{1.12}$$

Sei $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_l := \prod\limits_{k=1}^{l+1} \frac{1}{1-q^k}$. Es ist $a_l \leq a_{l+1}$ und für q fest gewählt gilt $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \in \mathbb{R}$. Wegen (1.12) folgt deshalb mit dem Monotoniekriterium die Ungleichung

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n. \tag{1.13}$$

Mit (1.13) und (1.11) folgt schließlich (1.7). Dies haben wir allerdings nur für $0 \leq q < 1$ gezeigt, was wir nun auf $q \in B_1(0)$ ausweiten wollen.

Seien f und g definiert durch

$$f(q) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k},\ g(q) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n.$$

Wenn f und g beide auf $B_1(0)$ holomorph sind, so folgt mit dem Identitätssatz (s. Lemma 1.12), dass (1.7) für alle $q \in B_1(0)$ gilt. Denn wegen

$$\{q \in \mathbb{R} :\ 0 \leq q < 1\} \subseteq \{z \in B_1(0) :\ f(z) = g(z)\},$$

hat die Koinzidenzmenge $\{z \in B_1(0) : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in $B_1(0)$. Die Holomorphie von f auf $B_1(0)$ hatten wir bereits gezeigt, es bleibt jene für g zu zeigen. Wir wissen g konvergiert für $0 \leq q < 1$, da in diesem Fall $f(q) = g(q)$ gilt. Für $q \to 1$ ergibt sich somit wegen Lemma 1.9 (ii), dass der Konvergenzradius von g mindestens 1 ist. Nach Korollar 1.11 sind Potenzreihen auf ihrer offenen Konvergenzkreisscheibe holomorph. Demnach ist g auf $B_1(0)$ holomorph, da es sich hierbei um ein Gebiet innerhalb der Konvergenzkreisscheibe handelt. □

1.2 Einführung der D'Arcais Polynome $P_n(z)$

Wir haben im Beweis von Satz 1.4 gezeigt, dass $\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}$ eine holomorphe Funktion auf der Einheitskreisscheibe definiert. Potenziert man diese Funktion mit einer komplexen Variablen z, so ist die resultierende Funktion

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}\right)^z = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-z},$$

als Komposition holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph (s. [6, s. 37] Kettenregel). Die garantierte Existenz einer Potenzreihenentwicklung für holomorphe Funktionen (s. [6, s. 106] Potenzreihenentwicklungssatz) führt zur folgenden Definition (vgl. [14, s. 1]).

Definition 1.16. Sei $q := e^{2\pi i\omega}$ mit $\omega \in \mathbb{H}$ (was äquivalent zu $|q| < 1$ ist). Die *D'Arcais Polynome* $P_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z}. \tag{1.14}$$

Die D'Arcais Polynome sind eine Verallgemeinerung der Partitionsfunktion und es gilt $P_n(1) = p(n)$. Wir werden nun eine Darstellung von (1.14) über die Exponentialfunktion und eine rekursive Formel für P_n herleiten. Letztere zeigt insbesondere, dass es sich bei den D'Arcais Polynomen tatsächlich um Polynome handelt. Für die Beweise bedarf es etwas Vorarbeit.

Nachfolgende Definition stammt aus [2, s. 38]. Der Rest dieses Abschnitts orientiert sich (wenn nicht anders angegeben) samt Beweisen an [2, s. 322-323].

Definition 1.17. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die *Teilersummenfunktion* $\sigma(k)$ definiert durch

$$\sigma(k) := \sum_{d|k} d,$$

wobei die Summe über alle positiven Teiler d von k läuft.

Lemma 1.18. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Konstante und sei*

$$f(x) := \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-z}.$$

Für $|x| < 1$ gilt:

$$\ln\left(f(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k}x^{nk}, \tag{1.15}$$

$$x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} znx^{nk} = z\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)x^k. \tag{1.16}$$

Beweis. Wie in der Literatur nehmen wir ohne Beweis an, dass f für $|x| < 1$ absolut konvergiert und dort eine holomorphe Funktion ist. Damit können wir den natürlichen Logarithmus auf $f(x)$ anwenden. Die Potenzreihendarstellung des Logarithmus lautet

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}. \tag{1.17}$$

Damit finden wir

$$\ln\left(f(x)\right) = -z\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-x^n) \overset{(1.17)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k}x^{nk}. \tag{1.18}$$

Schließlich betrachten wir

$$x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = x\cdot\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' \overset{(1.18)}{=} z\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} nx^{nk} = z\sum_{m=1}^{\infty}\sigma(m)x^m.$$

□

Die im nächsten Lemma beschriebene Konvergenzeigenschaft wird im Beweis von Proposition 1.20 benötigt. Ein Nachweis im Buch fehlt und wird stattdessen hier von uns erbracht.

Lemma 1.19. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Für $|x| < 1$ konvergieren die beiden Funktionsreihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} znx^{nk-1}, \tag{1.19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)zx^{k-1} \tag{1.20}$$

absolut und gleichmäßig.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Konstante und $r := |x| < 1$. Wir beginnen mit (1.19). Die innere Reihe notieren wir mit $a_n := \sum_{k=1}^{\infty} znx^{nk-1}$. Wir wollen eine Majorante M_n für $|a_n|$ finden und das Weierstraßsche Majorantenkriterium verwenden, um die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}|a_n| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|znx^{nk-1}\right| &= |z|nr^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(r^n)^k = |z|nr^{-1}\left(-1+\sum_{k=0}^{\infty}(r^n)^k\right)\\ &\overset{*1}{=} |z|nr^{-1}\left(-\frac{1-r^n}{1-r^n}+\frac{1}{1-r^n}\right) = |z|n\,\frac{r^{n-1}}{1-r^n} =: M_n.\end{aligned}$$

In Schritt $*_1$ haben wir die geometrische Reihe benutzt. Wir haben $|a_n| \leq M_n \in \mathbb{R}$ gezeigt. Wir zeigen nun die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ mit dem Quotientenkriterium.

$$\left|\frac{M_{n+1}}{M_n}\right| = \frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{|z|(n+1)r^n}{1-r^{n+1}} \cdot \frac{1-r^n}{|z|nr^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1-r^n}{1-r^{n+1}} \cdot r.$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{M_{n+1}}{M_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1-r^n}{1-r^{n+1}} \cdot r = 1 \cdot 1 \cdot r = r < 1.$$

Gemäß des Quotientenkriteriums konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ deshalb absolut. Mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium folgt nun die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|x| < 1$.

Wir fahren mit (1.20) fort. Sei $b_k := \sigma(k) z x^{k-1}$. Wir gehen wie eben vor und suchen eine geeignete Majorante M_k^* für $|b_k|$, um später das Weierstraßsche Majorantenkriterium zu verwenden. Da jede natürliche Zahl k maximal k positive Teiler hat und diese nie größer als k selbst sind, können wir die Abschätzung $\sigma(k) \leq k^2$ verwenden. Wir finden

$$|b_k| = \sigma(k)|z|r^{k-1} \leq k^2|z|r^{k-1} =: M_k^* \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Wir zeigen die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} M_k^*$ mit dem Quotientenkriterium.

$$\left|\frac{M_{k+1}^*}{M_k^*}\right| = \frac{M_{k+1}^*}{M_k^*} = \frac{(k+1)^2|z|r^k}{k^2|z|r^{k-1}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} r.$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{M_{k+1}^*}{M_k^*}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} r = 1 \cdot r = r < 1.$$

Gemäß des Quotientenkriteriums konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} M_k^*$ deshalb absolut. Mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium folgt nun die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ für $|x| < 1$.

□

Wir können nun die Darstellung von (1.14) über die Exponentialfunktion herleiten.

Proposition 1.20. *Sei $z \in \mathbb{C}$. Für $|q| < 1$ gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} = exp(z\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)\frac{q^n}{n}). \tag{1.22}$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Nach (1.16) gilt für $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z n x^{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k) z x^k.$$

Wir nehmen $x \neq 0$ an, teilen beide Seiten durch x und integrieren anschließend bezüglich x:

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z n x^{nk-1}\right)dx = \int\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k) z x^{k-1}\right)dx$$

Wegen absoluter und gleichmäßiger Konvergenz (gemäß Lemma 1.19) können wir Summation und Integration vertauschen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} zn \int x^{nk-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)z\int x^{k-1}dx$$

Ausführen der Integration:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k}x^{nk} = z\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)\frac{x^k}{k}$$

Nach (1.15) entspricht die linke Seite $\ln(f(x))$. Wir setzen ein und benennen x zu q um:

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z}\right) = z\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)\frac{q^k}{k}.$$

Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert die Behauptung für $q \neq 0$. Wie man leicht nachrechnet gilt (1.22) auch für $q = 0$. □

Wir zeigen nun, wie die D'Arcais Polynome rekursiv definiert werden können. Die Formel zeigt insbesondere, dass es sich tatsächlich um Polynome von Grad n handelt. Der Satz samt Beweis orientiert sich an [2, s. 322-323].

Satz 1.21. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$P_n(z) = \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)P_{n-k}(z), \quad P_0(z) = 1. \tag{1.23}$$

Beweis. Nach (1.16) gilt

$$x\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = z\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)x^k.$$

Multiplizieren beider Seiten mit $f(x)$ liefert

$$xf'(x) = zf(x)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)x^k.$$

Wir schreiben f als Potenzreihe (vgl. (1.14)) und erhalten damit

$$x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)x^{n-1} = z\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)x^n\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(k)x^k\right).$$

Mithilfe des Cauchy-Produktes finden wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(z)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}zP_{n-k}(z)\sigma(k)x^n.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$nP_n(z) = \sum_{k=1}^{n}zP_{n-k}(z)\sigma(k),$$

wodurch wir (1.23) erhalten. Einsetzen von $q = 0$ in (1.14) liefert $P_0(z) = 1$. □

1.3 Notwendige Kriterien für Nullstellen von $P_n(z)$

In diesem Abschnitt werden wir die rekursive Formel von Satz 1.21 nutzen, um wichtige Eigenschaften von $n!P_n(z)$ herzuleiten. Außerdem werden wir Ganzheitsringe einführen. Mit Hilfe der Ergebnisse leiten wir dann notwendige Kriterien für die Nullstellen von P_n her. Folgende Definition stammt aus [10, s. 446].

Definition 1.22. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $A_n(z) := n!P_n(z)$.

Das nachfolgende Lemma orientiert sich an [10, s. 446].

Lemma 1.23. *Für $n \geq 2$ existieren $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$, sodass*

$$A_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z.$$

Wegen $A_0(z) = 1$ und $A_1(z) = z$ folgt deshalb, dass A_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein normiertes Polynom von Grad n mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ ist.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 1.21

$$A_n(z) = n!P_n(z) = z\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)(n-1)!P_{n-k}(z) = z\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)A_{n-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}(n-m). \quad (1.24)$$

Wegen $A_0(z) = 1$ ist klar, dass A_n Grad n hat. Und da $\sigma(k) \in \mathbb{N}$ ist, hat A_n stets natürliche Koeffizienten. Die Normiertheit zeigen wir per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: A_1 ist normiert.

Induktionsvoraussetzung: Nehme an A_n ist normiert für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Mit (1.24) finden wir

$$A_{n+1}(z) = (n+1)!P_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{n+1}\sigma(k)n!zP_{n+1-k}(z) = \underbrace{n!zP_n(z)}_{*_1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1}\sigma(k)n!zP_{n+1-k}(z)}_{*_2}.$$

Es hat $*_1$ Grad $n+1$ und ist nach Induktionsvoraussetzung normiert. Andererseits hat $*_2$ Grad n. Folglich hat $A_{n+1}(z)$ als Summe von $*_1$ und $*_2$ Grad $n+1$ und ist normiert. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass A_n für $n \in \mathbb{N}$ normiert ist. □

Wir führen nun den Begriff Ganzheitsring ein. Die drei nächsten Definitionen stammen aus [27, s. 71; s. 81-83].

Definition 1.24. Ein $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt *algebraisch*, wenn ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ existiert. Kann man f mit ganzzahligen Koeffizienten wählen, so heißt α *algebraisch ganz*.

Definition 1.25. Ein Körper $K \subseteq \mathbb{C}$ von endlichem Grad über $\mathbb{Q}$ heißt *Zahlkörper*.

Definition 1.26. Sei K ein Zahlkörper. Der *Ganzheitsring* $\mathcal{O}_K$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_K := \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ ist algebraisch ganz}\}.$$

Ein Nachweis der Ringeigenschaft von $\mathcal{O}_K$ ist in [27, s. 73] zu finden. Das nächste Lemma orientiert sich samt Beweis an [27, s. 72].

Lemma 1.27. *Sei K ein Zahlkörper. Es gilt*

$$\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}. \tag{1.25}$$

Beweis. Sei $q \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, dann können wir q als $q = \frac{k}{m}$ schreiben, wobei $k, m \in \mathbb{Z}$ mit $m > 1$ und $\mathrm{ggT}(k, m) = 1$ ist. Sei K ein Zahlkörper und nehme an $q \in \mathcal{O}_K$. Dann existiert

$$f(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

mit $f(q) = 0$. Wir finden damit

$$\begin{aligned}
& 0 = \frac{k^n}{m^n} + \frac{a_{n-1}k^{n-1}}{m^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1 k}{m} + a_0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = k^n + a_{n-1}k^{n-1}m + \cdots + a_1 k m^{n-1} + a_0 m^n \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = k^n + m(a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k m^{n-2} + a_0 m^{n-1}) \\
\Leftrightarrow \quad & k^n = -m(a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k m^{n-2} + a_0 m^{n-1}).
\end{aligned}$$

Es folgt $m \mid k^n$. Andererseits gilt nach Voraussetzung $\mathrm{ggT}(k, m) = 1$ woraus $m \nmid k^n$ folgt. Wir haben einen Widerspruch und daher folgt

$$\mathcal{O}_K \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \varnothing.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_K$ und somit folgt die Behauptung. □

Mit den Ergebinssen des Abschnitts liegt folgendes Korollar auf der Hand:

Korollar 1.28. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P_n(\alpha) = 0$. Dann gilt*

(i) $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$,
(ii) $\alpha \notin \mathbb{R}_{>0}$,
(iii) $P_n(\overline{\alpha}) = 0$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.
Zu (i): Aus $P_n(\alpha) = 0$ folgt $A_n(\alpha) = 0$ und mit Lemma 1.23 folgt dann $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

Zu (ii): Da P_n nach Lemma 1.23 nur positive Koeffizienten hat, gilt für $\alpha > 0$ stets $P_n(\alpha) > 0$.

Zu (iii): Nach Lemma 1.23 ist P_n ein Polynom mit ausschließlich reellen Koeffizienten. Für solche gilt bekanntlich (leicht nachzurechnen), dass Nullstellen unter komplexer konjugation Nullstellen bleiben. □

Zwar erfüllt z.B. $\alpha = \pm i$ die Bedingungen (i) und (ii), jedoch gilt stets $P_n(\alpha) \neq 0$, wie wir später zeigen werden. Die Bedingung (i) impliziert wegen (1.25) insbesondere $\alpha \notin (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$. Zu (ii) sei noch angemerkt, dass für Nullstellen α sogar $Re(\alpha) \leq 0$ vermutet wird (s. Vermutung 4.2).

1.4 $n!P_n(z)$ modulo p

In diesem Abschnitt werden wir zeigen (Lemma 1.37), dass Nullstellen α von P_n algebraisch ganz mit Minimalpolynom $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ sind. Und dass für $p \in \{2, 3\}$ das Polynom $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$, welches durch Reduktion der Koeffizienten modulo p von Min_α entsteht, eine bis auf Reihenfolge eindeutige Linearfaktorzerlegung

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r}$$

besitzt, wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschieden sind. Lemma 1.37 ist essenziell für den in dieser Arbeit geführten Beweis von Satz 2.20. Wir beginnen damit, A_n modulo 2 bzw. 3 zu betrachten. Die nächsten beiden Lemmata orientieren sich samt Beweis an den Ideen aus [10, s. 450-452].

Lemma 1.29. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt*

$$A_{2l}(z) \equiv z^l(z+1)^l \pmod 2 \tag{1.26}$$

$$A_{2l+1}(z) \equiv z^{l+1}(z+1)^l \pmod 2 \tag{1.27}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den ungeraden Fall.

$$\begin{aligned} A_{2l+1}(z) &\overset{(1.24)}{=} z \sum_{k=1}^{2l+1} \sigma(k) A_{2l+1-k}(z) \prod_{m=1}^{k-1} 2l+1-m \\ &= z\left(A_{2l}(z) + \sum_{k=2}^{2l+1} \sigma(k) A_{2l+1-k}(z) \cdot 2l \prod_{m=2}^{k-1} 2l+1-m \right) \\ &\equiv z A_{2l}(z) \pmod 2 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$A_{2l+1}(z) \equiv z A_{2l}(z) \pmod 2. \tag{1.28}$$

Wir betrachten nun den geraden Fall, bevor wir mit dem ungeraden fortfahren.

Dabei sei zunächst $l \neq 0$. Wir finden

$$\begin{aligned}
A_{2l}(z) &\overset{(1.24)}{=} z \sum_{k=1}^{2l} \sigma(k) A_{2l-k}(z) \prod_{m=1}^{k-1} 2l - m \\
&= z\Bigg(A_{2l-1}(z) + 3A_{2l-2}(z)(2l-1) \\
&\quad + \sum_{k=3}^{2l} \sigma(k) A_{2l-k}(z)(2l-1)(2l-2) \prod_{m=3}^{k-1} 2l - m \Bigg) \\
&\equiv z\left(A_{2l-1}(z) + A_{2l-2}(z)\right) \pmod 2 \\
&\overset{(1.28)}{\equiv} z\left(zA_{2l-2}(z) + A_{2l-2}(z)\right) \pmod 2 \\
&\equiv z(z+1)A_{2(l-1)}(z) \pmod 2.
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt

$$A_{2l}(z) \equiv z(z+1)A_{2(l-1)}(z) \pmod 2. \tag{1.29}$$

Wendet man (1.29) rekursiv an, so folgt

$$A_{2l}(z) \equiv z^l(z+1)^l \pmod 2.$$

Diese Kongruenz gilt offensichtlich auch für $l = 0$. Einsetzen in (1.28) liefert schließlich

$$A_{2l+1}(z) \equiv z^{l+1}(z+1)^l \pmod 2.$$

□

Lemma 1.30. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt*

$$\begin{aligned}
A_{3l}(z) &\equiv z^l(z-1)^l(z+1)^l \pmod 3 \\
A_{3l+1}(z) &\equiv z^{l+1}(z-1)^l(z+1)^l \pmod 3 \\
A_{3l+2}(z) &\equiv z^{l+2}(z-1)^l(z+1)^l \pmod 3.
\end{aligned}$$

Beweis. Den Beweis führen wir analog zu dem von Lemma 1.29. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
A_{3l+1}(z) &\overset{(1.24)}{=} z \sum_{k=1}^{3l+1} \sigma(k) A_{3l+1-k}(z) \prod_{m=1}^{k-1} 3l + 1 - m \\
&= z\left(A_{3l}(z) + \sum_{k=2}^{3l+1} \sigma(k) A_{3l+1-k}(z)(3l) \prod_{m=2}^{k-1} 3l + 1 - m \right) \\
&\equiv zA_{3l}(z) \pmod 3.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$A_{3l+1}(z) \equiv zA_{3l}(z) \pmod 3. \tag{1.30}$$

Als nächstes betrachten wir

$$\begin{aligned}
A_{3l+2}(z) &\overset{(1.24)}{=} z\sum_{k=1}^{3l+2}\sigma(k)A_{3l+2-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}3l+2-m\\
&= z\Bigg(A_{3l+1}(z)+3A_{3l}(z)(3l+1)\\
&\quad+\sum_{k=3}^{3l+2}\sigma(k)A_{3l+2-k}(z)(3l+1)(3l)\prod_{m=3}^{k-1}3l+2-m\Bigg)\\
&\equiv zA_{3l+1}(z)\ (\mathrm{mod}\ 3)\\
&\overset{(1.30)}{\equiv} z^2A_{3l}(z)\ (\mathrm{mod}\ 3).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$A_{3l+2}(z)\equiv z^2A_{3l}(z)\ (\mathrm{mod}\ 3). \tag{1.31}$$

Zuletzt betrachten wir für $l\neq 0$

$$\begin{aligned}
A_{3l}(z) &\overset{(1.24)}{=} z\sum_{k=1}^{3l}\sigma(k)A_{3l-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}3l-m\\
&= z\Bigg(A_{3l-1}(z)+3A_{3l-2}(z)(3l-1)+4A_{3l-3}(z)(3l-1)(3l-2)\\
&\quad+\sum_{k=4}^{3l}\sigma(k)A_{3l-k}(z)(3l-1)(3l-2)(3l-3)\prod_{m=4}^{k-1}3l-m\Bigg)\\
&\equiv z\left(A_{3l-1}(z)-A_{3l-3}(z)\right)\ (\mathrm{mod}\ 3)\\
&\equiv z\left(A_{3(l-1)+2}(z)-A_{3(l-1)}(z)\right)\ (\mathrm{mod}\ 3)\\
&\overset{(1.31)}{\equiv} z\left(z^2A_{3(l-1)}(z)-A_{3(l-1)}(z)\right)\ (\mathrm{mod}\ 3)\\
&\equiv z(z^2-1)A_{3(l-1)}(z)\ (\mathrm{mod}\ 3).
\end{aligned}$$

Es folgt $A_{3l}(z)\equiv z(z^2-1)A_{3(l-1)}(z)\ (\mathrm{mod}\ 3)$. Dies wenden wir rekursiv an und erhalten

$$A_{3l}(z)\equiv z^l(z^2-1)^l\equiv z^l(z-1)^l(z+1)^l\ (\mathrm{mod}\ 3).$$

Diese Kongruenz gilt offensichtlich auch für $l=0$. Wir setzen sie in (1.30) und (1.31) ein, um die restlichen Kongruenzen zu erhalten. □

Es stellt sich die Frage, ob eine allgemeine Formel zur Berechnung von $A_n(z)$ modulo $p\in\mathbb{P}$ gefunden werden kann und ob immer eine vollständige Linearfaktorzerlegung über dem Körper $\mathbb{F}_p$ existiert. Dies adressiert die nächste Bemerkung.

Bemerkung 1.31. Sei $n\in\mathbb{N}$ und $p\in\mathbb{P}$. Definiere $l:=\lfloor\frac{n}{p}\rfloor$ und $r:=n-pl$, dann erhalten wir die Darstellung $n=pl+r$ (teilen mit Rest). In [10, s. 450-455] zeigten Heim, Luca und Neuhauser

$$A_n(z)\equiv A_r(z)\left(A_p(z)\right)^l\equiv A_r(z)\left(z(z^{p-1}-1)\right)^l\ (\mathrm{mod}\ p). \tag{1.32}$$

Insbesondere zeigten sie, dass A_n stets über dem Körper $\mathbb{F}_5$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, jedoch $A_5(z) \equiv z(z+3)(z+6)(z^2+1) \pmod 7$ bereits eine Zerlegung in irreduzible Faktoren in $\mathbb{F}_7$ ist. Das heißt, für A_5 existiert über dem Körper $\mathbb{F}_7$ keine vollständige Linearfaktorzerlegung.

Als Nächstes brauchen wir den Begriff des Minimalpolynoms. Um dieses zu definieren, stellen wir ein Lemma voran. Dieses übernehmen wir samt Beweis und der anschließenden Definition des Minimalpolynoms aus [20, s. 23]. Die Notation wurde angepasst.

Lemma 1.32. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch. Dann existiert ein eindeutiges normiertes Polynom $Min_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ minimalen Grades mit $Min_\alpha(\alpha) = 0$. Außerdem gilt für jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ die Eigenschaft $Min_\alpha \mid f$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch. Wir zeigen zunächst die Existenz eines solchen Polynoms Min_α. Weil α algebraisch ist, ist

$$F := \{f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \mid f(\alpha) = 0\} \neq \varnothing.$$

Wir wählen $f \in F$ minimalen Grades und teilen es durch seinen führenden Koeffizienten. Dadruch erhalten wir ein Polynom $Min_\alpha \in F$ minimalen Grades, das gleichzeitig normiert ist.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $f \in F$ beliebig, dann führen wir Division mit Rest durch. Eine Erklärung, warum Division mit Rest auch für Polynome funktioniert, findet sich in [20, s. 7-8].

$$f(X) = q(X)Min_\alpha(X) + r(X) \text{ mit } \deg(r) < \deg(Min_\alpha).$$

Wegen $f(\alpha) = Min_\alpha(\alpha) = 0$ folgt $r(\alpha) = 0$. Somit gilt entweder $r \in F$ oder $r = 0$. Es ist Min_α ein Polynom minimalen Grades in F und $\deg(r) < \deg(Min_\alpha)$. Damit muss $r = 0$ sein. Nun folgt sofort die Eindeutigkeit, denn hat man zwei Kandidaten Min_α und Min_α^*, so gilt $Min_\alpha \mid Min_\alpha^*$ und umgekehrt. Da beide normiert sind, sind sie bereits gleich. □

Definition 1.33. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch. Das eindeutige normierte Polynom $Min_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ minimalen Grades mit $Min_\alpha(\alpha) = 0$ aus Lemma 1.32 heißt das *Minimalpolynom* von α.

Das folgende Lemma ist samt Beweis aus [27, s. 66] übernommen.

Lemma 1.34. *Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ normierte Polynome. Dann gilt*

$$f \cdot g \in \mathbb{Z}[X] \quad \Rightarrow \quad f, g \in \mathbb{Z}[X].$$

Beweis. Seien

$$f(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0, \quad g(X) := X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_0 \quad \in \mathbb{Q}[X]$$

mit $fg \in \mathbb{Z}[X]$. Sei M die kleinste natürliche Zahl mit $Mf \in \mathbb{Z}[X]$. Wir setzen $A_i := Ma_i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i \leq n$. Analog sei N die kleinste natürliche Zahl mit $Ng \in \mathbb{Z}[X]$ und $B_j := Nb_j$ mit $0 \leq j \leq m$. Dann gilt

$$MNfg = A_nB_mX^{n+m} + (A_{n-1}B_m + A_nB_{m-1})X^{n+m-1} + \cdots + A_0B_0.$$

Wegen $fg \in \mathbb{Z}[X]$ sind sämtliche Koeffizienten auf der linken und daher auch auf der rechten Seite durch MN teilbar. Nehme an, p wäre eine Primzahl, die MN teilt. Wegen der Minimalität der Wahl von M und N gibt es Koeffizienten A_t, B_j, die nicht durch p teilbar sind. Seien i_0, j_0 die jeweils größten darunter vorkommenden Indizes. Dann hat der Koeffizient vor $X^{i_0+j_0}$ die Gestalt

$$A_{i_0}B_{j_0} + p \cdot \text{Rest},$$

ist also insbesondere nicht durch p teilbar. Aber dieser Koeffizient ist durch MN teilbar, was einen Widerspruch ergibt. Folglich gilt $MN = 1$ und daher $M = N = 1$. Nach der Definition von M und N folgt $f, g \in \mathbb{Z}[X]$. □

Jetzt können wir ein wichtiges Korollar herleiten (vgl. [27, s. 74]). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch ganz. Dann existiert ein normiertes Polynom $h \in \mathbb{Z}[X]$ mit $h(\alpha) = 0$ und gemäß Lemma 1.32 gilt $Min_\alpha \mid h$, d.h. es existiert ein $g \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$Min_\alpha \cdot g = h.$$

Da h und Min_α normiert sind, muss auch g normiert sein. Mit Lemma 1.34 folgt Korollar 1.35.

Korollar 1.35. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch ganz, dann ist $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.*

Das Korollar erlaubt es uns, das Minimalpolynom algebraisch ganzer Zahlen modulo $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

Definition 1.36. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch mit $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ das Polynom, welches durch Reduktion der Koeffizienten modulo n von Min_α entsteht.

Wir haben nun alles für den Beweis des Hauptergebnisses dieses Abschnitts beisammen. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P_n(\alpha) = 0$. Wegen $A_n(z) = n!P_n(z)$ gilt

$$P_n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A_n(\alpha) = 0.$$

Nach Lemma 1.23 ist $A_n \in \mathbb{Z}[X]$, normiert und besitzt Grad n. Folglich ist α algebraisch ganz. Mit Korollar 1.35 folgt $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ und mit Lemma 1.32 $Min_\alpha \mid A_n$. Gemäß Lemma 1.29 und 1.30 zerfällt A_n modulo $p \in \{2, 3\}$ (bis auf Reihenfolge) eindeutig in Linearfaktoren, weshalb dies für $\overline{Min_\alpha}$ als Teiler ebenfalls gilt. Damit folgt Lemma 1.37.

Lemma 1.37. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P_n(\alpha) = 0$. Dann ist α algebraisch ganz mit $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Für $p \in \{2, 3\}$ besitzt das Polynom $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$ eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Linearfaktorzerlegung*

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschieden sind.

2 Satz zu Einheitswurzeln als Nullstellen von $P_n(z)$

2.1 Grundlagen & Werkzeuge

In diesem Abschnitt greifen wir einige Aspekte aus der algebraischen Zahlentheorie und Algebra auf, um unseren Beweis von Satz 2.20 (von Heim, Luca und Neuhauser) weiter vorzubereiten. Die Aspekte umfassen im Wesentlichen Einheitswurzeln, Eigenschaften von Kreisteilungskörpern (insbesondere dem Zerlegungsgesetz von Primzahlen) und den Satz von Dedekind-Kummer. Für die nächsten beiden Definitionen und Lemmata vgl. [20, s. 245-246].

Definition 2.1. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$. ζ heißt *m-te Einheitswurzel*, wenn $\zeta^m = 1$ gilt. Die Menge der m-ten Einheitswurzeln bezeichnen wir mit μ_m. Die Elemente aus $\mu := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mu_m$ nennen wir *Einheitswurzeln.*

Definition 2.2. Ist die Ordnung von $\zeta \in \mu_m$ in der Einheitengruppe $\mathbb{C}^\times$ von $\mathbb{C}$ gleich m (d.h. $ord(\zeta) = m$), so heißt ζ *primitive* m-te Einheitswurzel.

Lemma 2.3. *μ_m ist eine zyklische Gruppe mit m Elementen. Für $\zeta \in \mu_m$ gilt*

$$\langle\zeta\rangle = \mu_m \quad \Leftrightarrow \quad \zeta \text{ ist primitiv.}$$

Lemma 2.4. *Jede m-te Einheitswurzel ζ_m lässt sich schreiben als*

$$\zeta_m = e^{\frac{2\pi ik}{m}}, \quad k \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Gilt $\mathrm{ggT}(k, m) = 1$, so ist ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel.

Bemerkung 2.5. Gemäß Lemma 2.4 ist jede m-te Einheitswurzel $\zeta_m = e^{\frac{2\pi ik}{m}}, \quad k \in \{0, \dots, m-1\}$ eine primitive $\frac{m}{\mathrm{ggT}(k,m)}$-te Einheitswurzel ($\frac{k}{m}$ kürzen).

Die Definition des Kreisteilungskörpers ist aus [20, s. 251] übernommen.

Definition 2.6. Sei $m \in \mathbb{N}$. Der Zerfällungskörper Z_m über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $f(x) = x^m - 1$ heißt m-ter *Kreisteilungskörper.*

Bemerkung 2.7. Für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m folgt mit Lemma 2.3

$$Z_m = \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

Für die nächsten beiden Definitionen sind aus [20, s. 247; s. 253] übernommen.

Definition 2.8. Die *Eulersche φ–Funktion* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\varphi(n) := |\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}|.$$

Definition 2.9. Das *m-te Kreisteilungspolynom* ist definiert durch

$$\phi_m(x) := \prod_{\zeta\in\mu_m \text{ primitiv}} (x - \zeta)$$

und hat Grad $\varphi(m)$.

Der nächste Satz orientiert sich an [20, s. 258; s. 260].

Satz 2.10. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel. Dann ist $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ eine Galoiserweiterung vom Grad $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ und $\phi_m \in \mathbb{Z}[X]$ ist das Minimalpolynom von ζ_m.*

Der nächste Satz stammt aus [25, s. 63].

Satz 2.11. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Dann ist*

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m].$$

Bemerkung 2.12. Satz 2.11 liegt eine besondere Eigenschaft für Kreisteilungskörper zugrunde. Jedes Element aus $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}$ lässt sich als ganzzahlige Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B} := \{1, \zeta_m, \ldots, \zeta_m^{\varphi(m)-1}\}$ schreiben (vgl. [25, s. 63-64]). $\mathcal{B}$ ist eine Ganzheitsbasis und in diesem Fall gleichzeitig eine Power-Basis (d.h. sie besteht aus Potenzen eines einzelnen Elements). Für beliebige Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt die Eigenschaft $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ im Allgemeinen jedoch nicht.

Der nächste Satz stammt aus [25, s. 19]. Die Notation wurde angepasst.

Satz 2.13. *Sei $\mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{O}_K$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq (0)$. Dann existiert eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Zerlegung*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}, \tag{2.1}$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ verschiedene Primideale in $\mathcal{O}_K$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ sind.

Definition 2.14. Eine Zerlegung wie in (2.1) nennen wir *Primidealzerlegung.*

Nachfolgende Definition ist aus [25, s. 48] übernommen. Die Notation wurde angepasst.

Definition 2.15. Sei K ein Zahlkörper, $p \in \mathbb{P}$ und es liege die Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

vor. Der Grad f_k $(1 \leq k \leq r)$ der Körpererweiterung $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_k)/\mathbb{F}_p$ heißt *Trägheitsgrad* von $\mathfrak{p}_k$ über $p\mathbb{Z}$.

Bemerkung 2.16. Bezüglich des Satzes von Dedekind-Kummer gilt es folgendes im Hinterkopf zu haben:

(*i*) Gemäß Korollar 1.35 ist für $\alpha \in \mathcal{O}_K$ das Minimalpolynom $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.

(*ii*) Ist R ein faktorieller Ring, so auch $R[X]$ (vgl. [20, s. 134]).

Die folgende Variante des Satzes von Dedekind-Kummer stammt aus [23, s. 184-185] und wurde lediglich leicht gekürzt und an die Notation dieser Arbeit angepasst.

Satz 2.17 (**Dedekind-Kummer**). *Sei K ein Zahlkörper und sei $\alpha \in \mathcal{O}_K$ so gewählt, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt. Weiter sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$. Sei $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$ (d.h. das Polynom, welches durch die Reduktion der Koeffizienten modulo p von Min_α entsteht). Dieses besitzt eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Faktorisierung*

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschiedene irreduzible normierte Polynome sind. Und es existiert eine Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}. \tag{2.2}$$

Der Trägheitsgrad von $\mathfrak{p}_k$ ist gegeben durch den Grad von $\overline{g_k}$ $(1 \leq k \leq r)$.

Das nachfolgende Zerlegungsgesetz (vgl. [25, s. 64]) hilft uns die Trägheitsgrade der Primideale in (2.2) abzuschätzen, wenn K ein Kreisteilungskörper ist.

Satz 2.18. *Sei $m \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p}$, hierbei ist ν_p die Anzahl, wie oft p in der Zerlegung vorkommt. Für jedes p sei weiter $f_p^* \in \mathbb{N}$ minimal, sodass*

$$p^{f_p^*} \equiv 1 \mod \frac{m}{p^{\nu_p}}.$$

Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel. Dann existiert für $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$ eine Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{\varphi(p^{\nu_p})} \cdots \mathfrak{p}_r^{\varphi(p^{\nu_p})},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ allesamt Trägheitsgrad f_p^* haben.

Wir schauen uns das folgende wichtige Anwendungsbeispiel von Satz 2.18 an:

Korollar 2.19. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Für $p \in \mathbb{P}$ existiert eine Primidealzerlegung*

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ allesamt Trägheitsgrad f_p^* haben. Außerdem gilt

$$f_2^* = f_3^* = 1 \quad \Rightarrow \quad m \leq 2. \tag{2.3}$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p}$, hierbei ist ν_p die Anzahl, wie oft p in der Zerlegung vorkommt. Dann existiert für jedes p ein $f_p^* \in \mathbb{N}$ minimal, sodass

$$p^{f_p^*} \equiv 1 \mod \frac{m}{p^{\nu_p}}.$$

Denn wegen $\mathrm{ggT}(p, \frac{m}{p^{\nu_p}}) = 1$ ist $p \in \left(\mathbb{Z}/\frac{m}{p^{\nu_p}}\mathbb{Z}\right)^\times$ und somit hat p nach dem Satz von Lagrange endliche Ordnung. Der Satz von Lagrange besagt insbesondere, dass Elemente endlicher Gruppen eine endliche Ordnung haben (vgl. [20, s. 70]). Für

jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$ folgt nun mit Satz 2.18 die Existenz einer Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{\varphi(p^{\nu_p})} \cdots \mathfrak{p}_r^{\varphi(p^{\nu_p})},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ allesamt Trägheitsgrad f_p^* haben. Die Implikation (2.3) zeigen wir durch den Beweis ihrer Kontraposition. Sei $m \geq 3$.

Setze $p = 2$. Wir suchen f_2^* minimal, sodass

$$2^{f_2^*} \equiv 1 \mod \frac{m}{2^{\nu_2}}.$$

Im Fall $p \mid m$: Es ist $\frac{m}{2^{\nu_2}} \in \{1, \ldots, m-1\}$. Es gilt $f_2^* = 1$ genau dann, wenn m der Form $m = 2^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ ist. Sonst ist $f_2^* \geq 2$.

Im Fall $p \nmid m$: Es ist $\nu_2 = 0$ und damit $\frac{m}{2^{\nu_2}} = m \geq 3$ nach Voraussetzung. Somit folgt $f_2^* \geq 2$.

Folglich liegt genau dann der Trägheitsgrad $f_2^* = 1$ vor, wenn m der Form $m = 2^l$ ist.

Setze $p = 3$. Wir suchen f_3^* minimal, sodass

$$3^{f_3^*} \equiv 1 \mod \frac{m}{3^{\nu_3}}.$$

Im Fall $p \mid m$: Es ist $\frac{m}{3^{\nu_3}} \in \{1, \ldots, m-1\}$. Es gilt $f_3^* = 1$ genau dann, wenn m der Form $m = 3^l$ oder $m = 2 \cdot 3^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ ist. Sonst ist $f_3^* \geq 2$.

Im Fall $p \nmid m$: Es ist $\nu_3 = 0$ und damit $\frac{m}{3^{\nu_3}} = m \geq 4$ nach Voraussetzung. Somit folgt $f_3^* \geq 2$.

Folglich liegt genau dann der Trägheitsgrad $f_3^* = 1$ vor, wenn m der Form $m = 3^l$ oder $m = 2 \cdot 3^l$ ist.

Nehme an $f_2^* = f_3^* = 1$. Dann hat nach unserer Untersuchung m die Form $m = 2^l$ und es gilt $3 \mid m$. Da so ein m nicht existiert, haben wir einen Widerspruch und somit die Kontraposition von (2.3) gezeigt. □

2.2 Der Satz von Heim, Luca und Neuhauser

Wir haben nun alles vorbereitet und geben einen alternativen Beweis für Satz 2.20 von Heim, Luca und Neuhauser [10, s. 448]. Der Beweisansatz stammt von meinem Betreuer, wurde eigenständig von mir ausgearbeitet und ist Hauptresultat dieser Arbeit.

Satz 2.20. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 3$. So gilt*

$$P_n(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 3$. Nehme an $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $P_n(\zeta_m) = 0$. Wir setzen $\alpha = \zeta_m$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und prüfen, ob die Voraussetzung vom Dedekind-Kummer Satz erfüllt ist. Wegen $A_n(\alpha) = n!P_n(\alpha) = 0$ folgt mit Lemma 1.23, welches insbesondere $A_n \in \mathbb{Z}[X]$ ist normiert besagt, dass $\alpha \in \mathcal{O}_K$ ist. Gemäß Satz 2.11 gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, deshalb besitzt jedes $p \in \mathbb{P}$ die Eigenschaft

$$p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]] = [\mathcal{O}_K : \mathcal{O}_K] = 1.$$

Die Voraussetzung des Dedekind-Kummer Satzes ist somit erfüllt. Aus diesem folgt nun für $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$ die Existenz einer (bis auf Reihenfolge) eindeutigen Faktorisierung

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschiedene irreduzible normierte Polynome sind. Weiter existiert laut Satz eine Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Hierbei stimmt der Trägheitsgrad f_k von $\mathfrak{p}_k$ mit dem Grad von $\overline{g_k}$ überein $(1 \leq k \leq r)$. Gemäß Satz 2.13 ist eine Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$ bis auf Reihenfolge eindeutig.

Für $p = 2$ folgt aus Lemma 1.37, dass $\overline{Min_\alpha}$ eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Linearfaktorzerlegung besitzt, somit hat $\overline{g_k}$ $(1 \leq k \leq r)$ Grad 1. Damit ist $f_1 = \cdots = f_r =: f_2^* = 1$. Für $p = 3$ folgt mit Lemma 1.37 analog $f_1 = \cdots = f_r =: f_3^* = 1$.

Es ist $f_2^* = f_3^* = 1$. Mit der Implikation (2.3) aus Korollar 2.19 folgt daraus allerdings $m \leq 2$ und wir haben einen Widerspruch. Daher war die Annahme $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $P_n(\zeta_m) = 0$ zu Beginn falsch und es folgt

$$P_n(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Mit Satz 2.20 haben wir die Einheitswurzeln $\mu \setminus \{-1, 1\}$ behandelt. Dass das Betrachten der Fälle $p = 2$ und $p = 3$ ausreicht, um genug Rückschlüsse über m zu ziehen und ζ_m mit $m \geq 3$ als Nullstelle auszuschließen, ist dabei sehr überraschend. Wie es um den Fall $\zeta = 1$ steht, geht aus dem nächsten Satz hervor.

Satz 2.21. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $P_n(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ und $P_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$.*

Beweis. Im Beweis betrachten wir q als komplexe Variable mit $|q| < 1$. Sei $z \in \mathbb{N}$. Mit (1.14) und der geometrischen Reihe finden wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} &= \left(\frac{1}{1-q}\right)^z \cdot \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^z \cdot \left(\frac{1}{1-q^3}\right)^z \cdots \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\right)^z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{3n}\right)^z \cdots\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichungskette ist wegen $z \in \mathbb{N}$ der erste Faktor eine Summe von $q-$Potenzen in der jeder Exponent einmal auftritt. Die anderen Faktoren sind

Summen von q–Potenzen, in denen immerhin 1 als Summand auftritt. Folglich ist das gesamte Produkt eine Summe von q–Potenzen, in der jeder Exponent einmal auftritt. Dabei sind die Koeffizienten aus $\mathbb{N}$, da sie vorher auch stets auch $\mathbb{N}$ waren. Ein Koeffizientenvergleich mit der linken Seite der Gleichungskette liefert $P_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Mit (1.14) und dem binomischen Lehrsatz finden wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} = \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{-z}\binom{-z}{k}(-1)^k q^{nk}.$$

Wegen $-z \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{-z}{k} \in \mathbb{N}$. Auf der rechten Seite der Gleichungskette ist daher jeder Summand eine q–Potenz mit ganzen Koeffizienten. Folglich ist jeder Faktor des Produkts eine Summe von q–Potenzen mit ganzen Koeffizienten. Folglich lässt sich das gesamte Produkt als eine Summe von q–Potenzen mit ganzen Koeffizienten schreiben. Ein Koeffizientenvergleich mit der linken Seite der Gleichungskette liefert $P_n(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ und mit $P_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ folgt schließlich $P_n(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Wir haben insbesondere $P_n(1) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Doch wie steht es um $\zeta = -1$? Um dies zu untersuchen, benutzen wir Euler's Pentagonalzahlensatz. Ein Beweis zum Pentagonalzahlensatz und die Definition der Pentagonalzahlen sind in [1, s. 10-12] zu finden.

Definition 2.22. Eine Zahl n der Form

$$n = \frac{3k^2 \pm k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

heißt *Pentagonalzahl.*

Satz 2.23 (**Pentagonalzahlensatz - Euler**).
Sei $|q| < 1$. *So gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{3k^2-k}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(q^{\frac{3k^2-k}{2}} + q^{\frac{3k^2+k}{2}}). \tag{2.4}$$

Der Pentagonalzahlensatz zeigt, dass für $z = -1$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $P_n(z) = 0$ ist [10, s. 448]. Genauer beschreibt dies folgendes Korollar:

Korollar 2.24. *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$P_n(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ ist keine Pentagonalzahl.}$$

Beweis. Sei

$$P_1 := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}_0 : \quad n = \frac{3k^2+k}{2} \right\}, \quad P_2 := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}_0 : \quad n = \frac{3k^2-k}{2} \right\}.$$

Wir zeigen zunächst

$$P_c := P_1 \cap P_2 = \{0\}.$$

Es gilt genau dann $n \in P_c$, wenn $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $n = \frac{3k^2-k}{2} = \frac{3l^2+l}{2}$ existieren. Sei $k+l=0$, so folgt $k=l=0$ und damit $0 \in P_c$. Sei nun $k+l \neq 0$, dann finden wir

$$\begin{aligned} & \frac{3k^2-k}{2} = \frac{3l^2+l}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 3k^2-3l^2 = k+l \\ \Leftrightarrow \quad & 3(k-l)(k+l) = k+l \\ \Leftrightarrow \quad & k-l = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wegen $k-l \in \mathbb{Z}$ folgt $P_c = \{0\}$.

Sei nun q eine komplexe Variable mit $|q| < 1$ und sei $z = -1$. Dann finden wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)q^n \overset{(1.14)}{=} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \overset{(2.4)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(q^{\frac{3k^2-k}{2}} + q^{\frac{3k^2+k}{2}}).$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite liefert wegen $P_c = \{0\}$ die Behauptung. □

Korollar 2.24 gibt in Kombination mit (0.1) Aufschluss darüber, welche Fourier Koeffizienten der Dedekindschen Etafunktion verschwinden. Wir bleiben jedoch an dieser Stelle bei $P_n(\zeta)$ für i.A. von -1 verschiedenen Einheitswurzeln ζ und bündeln unsere Ergebnisse. Sei ζ_m eine m-te Einheitswurzel. Wegen Bemerkung 2.5 können wir o.B.d.A. annehmen, dass ζ_m primitiv ist. Sei $P_n(\zeta_m) = 0$. Aus Satz 2.20 folgt $\zeta_m \in \{-1, 1\}$ und mit Satz 2.21 folgt weiter $\zeta_m = -1$. Aus Korollar 2.24 folgt wegen $P_n(\zeta_m) = 0$, dass n keine Pentagonalzahl ist. Andererseits sei nun $\zeta = -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ keine Pentagonalzahl. Dann folgt mit Korollar 2.24 $P_n(\zeta) = 0$. Damit ist folgendes prägnante Korollar gezeigt, mit dem wir diesen Abschnitt schließen.

Korollar 2.25. *Sei ζ eine Einheitswurzel. $P_n(\zeta) = 0$ gilt genau dann, wenn $\zeta = -1$ ist und n keine Pentagonalzahl ist.*

3 Verallgemeinerung des Satzes auf $P_n^g(z)$

Von meinem Betreuer habe ich die Aufgabe bekommen, Satz 2.20 von Heim, Luca und Neuhauser [10, s. 448] zu verallgemeinern. Einfach gesagt soll dazu in der rekursiven Formel

$$P_n(z) = \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)P_{n-k}(z)$$

aus (1.23), σ durch eine Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(1) = 1$ ersetzt werden. Die dadurch entstehende Funktion bezeichnen wir mit P_n^g. Unter gewissen Forderungen an g gilt Satz 2.20 auch für P_n^g. Żmija nutzt in seiner Arbeit [31] die Ideen aus [10], um solche Forderungen aufzustellen. In Abschnitt 3.1 werden wir die Hauptergebnisse seiner Arbeit betrachten. Später in Abschnitt 3.2 werden wir eine neue Forderung mit Hilfe der Beweistechnik aus Satz 2.20 herleiten und Bezug zu Żmijas Arbeit herstellen. Insbesondere werden wir ein explizites g angeben, das unseren Forderungen genügt, jedoch denen aus Żmijas Arbeit nicht.

3.1 Hauptergebnisse von Żmija

Die Definition stammt aus [16, s. 511]. Die Notation wurde angepasst.

Definition 3.1. Für Funktionen $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $g(1) = 1$ definieren wir

$$P_n^g(z) := \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} g(k) P_{n-k}^g(z), \quad P_0^g(z) := 1$$

und

$$A_n^g(z) := n! P_n^g(z).$$

Wir betrachten exemplarisch ein paar Werte, die später von Nutzen sein werden.

Beispiel 3.2.

$$\begin{aligned}
&P_0^g(z) = 1;\\
&P_1^g(z) = z;\\
&P_2^g(z) = \frac{z}{2}\left(z + g(2)\right);\\
&P_3^g(z) = \frac{z}{3}\left(\frac{z}{2}\left(z + g(2)\right) + g(2)z + g(3)\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_0^g(z) = 1;\\
&A_1^g(z) = z;\\
&A_2^g(z) = z\left(z + g(2)\right);\\
&A_3^g(z) = z\left(z^2 + 3g(2)z + 2g(3)\right);
\end{aligned}$$

Die nächsten beiden Sätze und Korollar 3.5 sind in [31, s. 1071-1076] zu finden. Formulierung und Notation wurden angepasst.

Satz 3.3. *Sei g derart, dass $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ sei $l := \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ und $r := n - pl$, dann erhalten wir die Darstellung $n = pl + r$ (teilen mit Rest). Nun gilt*

$$A_n^g(z) \equiv A_r^g(z)\left(A_p^g(z)\right)^l \equiv A_r^g(z)\left(z(z^{p-1} - 1)\right)^l \pmod{p}.$$

Folgender Satz von Żmija ist in [31, s. 1071-1072] zu finden.

Satz 3.4 (Żmija). *Sei g derart, dass $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Außerdem gelte:*

(i) ***Modulo** 5**:** Keines der Polynome A_3^g und A_4^g ist durch ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 2 über $\mathbb{F}_5$ teilbar.*

(ii) ***Modulo** 7**:** Keines der Polynome A_r^g für $2 \leq r \leq 6$ ist durch ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 4 über $\mathbb{F}_7$ teilbar.*

(iii) ***Modulo*** 11*: Keines der Polynome A_r^g für $2 \le r \le 10$ ist durch ein normiertes irreduzibles Polynom über $\mathbb{F}_{11}$ teilbar, das $z^{11^6-1} - 1$ teilt und $z^{11^d-1} - 1$ nicht teilt, für $1 \le d \le 10,\ d \ne 6$.*

Dann gilt für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m mit $m \ge 3$

$$P_n^g(\zeta_m) \ne 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Statt der Forderungen (i) bis (iii) kann sich im Beweis von Satz 3.4 ([31, s. 1074-1075]) auf primitive m-te Einheitswurzeln mit $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385 \mid m$ beschränkt werden, was das folgende Resultat liefert:

Korollar 3.5. *Sei g derart, dass $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann gilt für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m mit $385 \mid m$*

$$P_n^g(\zeta_m) \ne 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Herleitung der nächsten Lemmas orientiert sich an [31, s. 1076-1078]. Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$ mit $c_1 = 1$. Weiter sei $g(k) := \sum_{d|k} d \cdot c_d$. Gemäß [31, s. 1076] gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-c_n z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^g(z) q^n, \tag{3.1}$$

wobei wir $q \in \mathbb{C}$ als Variable mit $|q| < 1$ betrachten. Für $z \in \mathbb{N}$ entspricht $P_n^g(z)$ der Anzahl an Partitionen von n, sodass wenn k als Teil auftritt, die Partition mit einer von $c_k z$ Farben gefärbt werden kann [31, s. 1076]. Aufgrund der kombinatorischen Interpretation muss $P_n^g(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ gelten [31, s. 1078]. Für $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist $-c_k z \in \mathbb{N}_0$. Daher steht auf der linken Seite von (3.1) eine Summe von $q-$Potenzen mit ganzzahligen Koeffizienten (ausmultiplizieren). Ein Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite liefert $P_n^g(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$. Damit folgt das nächste Lemma.

Lemma 3.6. *Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$ mit $c_1 = 1$ und sei*

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(k) := \sum_{d|k} d \cdot c_d.$$

Dann ist $g(1) = 1$ und es gilt $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 3.6 zeigt, dass ein solches g der Voraussetzung von Korollar 3.5 genügt und in Satz 3.4 nur die Bedingungen (i) bis (iii) zu prüfen sind.

3.2 Eigene Ergebnisse

In diesem Abschnitt bezeichnet g stets eine Funktion

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ mit } g(1) = 1.$$

Wir werden zeigen, dass Satz 2.20 aus Abschnitt 2.2 auch für P_n^g gilt, wenn $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ ist. Die Beweistechnik bleibt die gleiche. Die Forderung $g(1) = 1$ ist wichtig, um die Normiertheit von A_n^g zu gewährleisten. Und für $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ zerfällt

A_n^g stets vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{F}_3$. Wir beginnen damit, einige der bisherigen Erkenntnisse über P_n auf P_n^g zu verallgemeinern.

Das nächste Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 1.23. Es wird analog bewiesen und orientiert sich daher ebenfalls an [10, s. 446].

Lemma 3.7. *Für $n \geq 2$ existieren $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$, sodass*

$$A_n^g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z.$$

Wegen $A_0^g(z) = 1$ und $A_1^g(z) = z$ folgt deshalb, dass A_n^g für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein normiertes Polynom von Grad n mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ ist.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ finden wir mit Definition 3.1

$$A_n^g(z) = n!P_n^g(z) = z\sum_{k=1}^{n} g(k)(n-1)!P_{n-k}^g(z) = z\sum_{k=1}^{n} g(k)A_{n-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(n-m). \quad (3.2)$$

Wegen $A_0^g(z) = 1$ ist klar, dass A_n^g Grad n hat. Und da $g(k) \in \mathbb{N}$ ist, hat A_n^g stets natürliche Koeffizienten. Die Normiertheit zeigt man wie in Lemma 1.23 mit vollständiger Induktion. Wegen $g(1) = 1$ ist A_1^g normiert und dient als Induktionsanfang. □

Angelehnt an (1.32) beruht der nächste Satz auf den Ideen aus [10, s. 450-455].

Satz 3.8. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{P}$ sei $l := \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ und $r := n - pl$, dann erhalten wir die Darstellung $n = pl + r$ (teilen mit Rest). Nun gilt*

$$A_n^g(z) \equiv A_r^g(z)\left(A_p^g(z)\right)^l \pmod{p}. \quad (3.3)$$

Beweis. Offensichtlich gilt (3.3) für $n = 0$. Sei von nun an $n \in \mathbb{N}$. Es seien zunächst $p \in \mathbb{P}$, $l \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{1, \ldots, p\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} A_{pl+r}^g(z) &\overset{(3.2)}{=} z\sum_{k=1}^{pl+r} g(k)A_{pl+r-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(pl+r-m) \\ &\equiv z\sum_{k=1}^{pl+r} g(k)A_{pl+r-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(r-m) \\ &\equiv z\sum_{k=1}^{r} g(k)A_{pl+r-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(r-m) \pmod{p}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir zeigen zunächst

$$A_{p(l+1)+r}^g(z) \equiv A_r^g(z)A_{pl+p}^g(z) \pmod{p}. \quad (3.5)$$

Dies folgt induktiv aus

$$\begin{aligned}
A^g_{p(l+1)+1}(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{1} g(k)A^g_{p(l+1)+1-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}(1-m)\\
&\equiv zA^g_{pl+p}(z)\\
&\equiv A^g_1(z)A^g_{pl+p}(z) \pmod p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^g_{p(l+1)+2}(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{2} g(k)A^g_{p(l+1)+2-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}(2-m)\\
&\equiv z\Big(A^g_{p(l+1)+1}(z)+g(2)A^g_{pl+p}(z)\Big)\\
&\equiv z(z+g(2))A^g_{pl+p}(z)\\
&\equiv A^g_2(z)A^g_{pl+p}(z) \pmod p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^g_{p(l+1)+3}(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{3} g(k)A^g_{p(l+1)+3-k}(z)\prod_{m=1}^{k-1}(3-m)\\
&\equiv z\Big(A^g_{p(l+1)+2}(z)+2g(2)A^g_{p(l+1)+1}(z)+2g(3)A^g_{pl+p}(z)\Big)\\
&\equiv z(z^2+3zg(2)+2g(3))A^g_{pl+p}(z)\\
&\equiv A^g_3(z)A^g_{pl+p}(z) \pmod p;
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
A^g_{p(l+1)+p}(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} \cdots\\
&\equiv A^g_p(z)A^g_{pl+p}(z) \pmod p;
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir

$$A^g_{pl+p}(z) \equiv \Big(A^g_p(z)\Big)^{l+1} \pmod p. \tag{3.6}$$

Dies folgt induktiv aus

$$\begin{aligned} A_p^g(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{p} g(k)A_{p-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(p-m) \\ &\equiv z\left(A_{p-1}^g(z) - g(2)A_{p-2}^g(z) + 2g(3)A_{p-3}^g(z) + \cdots\right) \pmod p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{p+p}^g(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{p} g(k)A_{p2-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(p-m) \\ &\equiv z\left(A_{p2-1}^g(z) - g(2)A_{p2-2}^g(z) + 2g(3)A_{p2-3}^g(z) + \cdots\right) \\ &\overset{(3.5)}{\equiv} z\left(A_{p-1}^g(z) - g(2)A_{p-2}^g(z) + 2g(3)A_{p-3}^g(z) + \cdots\right)A_p^g(z) \\ &\equiv \left(A_p^g(z)\right)^2 \pmod p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{p2+p}^g(z) &\overset{(3.4)}{\equiv} z\sum_{k=1}^{p} g(k)A_{p3-k}^g(z)\prod_{m=1}^{k-1}(p-m) \\ &\equiv z\left(A_{p3-1}^g(z) - g(2)A_{p3-2}^g(z) + 2g(3)A_{p3-3}^g(z) + \cdots\right) \\ &\equiv z\left(A_{p2+(p-1)}^g(z) - g(2)A_{p2+(p-2)}^g(z) + 2g(3)A_{p2+(p-3)}^g(z) + \cdots\right) \\ &\overset{(3.5)}{\equiv} z\left(A_{p-1}^g(z) - g(2)A_{p-2}^g(z) + 2g(3)A_{p-3}^g(z) + \cdots\right)A_{p+p}^g(z) \\ &\equiv \left(A_p^g(z)\right)^3 \pmod p; \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Einsetzen von (3.6) in (3.5) liefert zusammen mit einer Indexverschiebung

$$A_{pl+r}^g(z) \equiv A_r^g(z)\left(A_p^g(z)\right)^l \pmod p. \tag{3.7}$$

Wegen der Indexverschiebung haben wir (3.7) nur für $l \in \mathbb{N}$ gezeigt, jedoch ist die Kongruenz offensichtlich auch für $l \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Wegen $pl + p = p(l+1)$ können wir $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ statt $r \in \{1, \ldots, p\}$ fordern. Durch die Darstellung $n = pl + r \in \mathbb{N}_0$ (teilen mit Rest) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.9. Im Allgemeinen gilt $A_p^g(z) \not\equiv z(z^{p-1} - 1) \pmod p$. So findet man zum Beispiel für $g(k) := \sum_{d|k} 1$, dass

$$A_2^g(z) = z(g(1)z + g(2)) = z(z+2) \equiv z^2 \not\equiv z^2 - z \pmod 2.$$

Mit Satz 3.8 wollen wir nun untersuchen, wann A_n^g modulo 2 bzw. 3 in Linearfaktoren zerfällt. Alternativ führen Rechnungen analog zu den Beweisen von Lemma 1.29 und 1.30 zum gleichen Ergebnis. Mit (3.3) und den Ergebnissen aus Beispiel 3.2 finden wir für $p = 2$ und $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} A_{2l}^g(z) &\equiv A_0^g(z)\left(A_2^g(z)\right)^l \equiv z^l\left(z + g(2)\right)^l \pmod 2; \\ A_{2l+1}^g(z) &\equiv A_1^g(z)\left(A_2^g(z)\right)^l \equiv z^{l+1}\left(z + g(2)\right)^l \pmod 2; \end{aligned}$$

Und für $p = 3$ und $l \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich:

$$A^g_{3l}(z) \equiv A^g_0(z)\,(A^g_3(z))^l \equiv z^l(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$
$$A^g_{3l+1}(z) \equiv A^g_1(z)\,(A^g_3(z))^l \equiv z^{l+1}(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$
$$A^g_{3l+2}(z) \equiv A^g_2(z)\,(A^g_3(z))^l \equiv z^{l+1}(z + g(2))(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$

Daraus ergeben sich die folgenden Lemmata.

Lemma 3.10. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:*

$$A^g_{2l}(z) \equiv z^l(z + g(2))^l \pmod 2;$$
$$A^g_{2l+1}(z) \equiv z^{l+1}(z + g(2))^l \pmod 2;$$

Lemma 3.11. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:*

$$A^g_{3l}(z) \equiv z^l(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$
$$A^g_{3l+1}(z) \equiv z^{l+1}(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$
$$A^g_{3l+2}(z) \equiv z^{l+1}(z + g(2))(z^2 - g(3))^l \pmod 3;$$

Wie wir sehen zerfällt A^g_n für alle $n \in \mathbb{N}$ ohne weitere Forderung an g vollständig über $\mathbb{F}_2$ in Linearfaktoren. Über $\mathbb{F}_3$ ist das nicht der Fall. Das nächste Korollar klärt auf.

Korollar 3.12. *A^g_n zerfällt genau dann vollständig in Linearfaktoren über dem Körper $\mathbb{F}_3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ gilt.*

Beweis. Nach Lemma 3.11 zerfällt A^g_n vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{F}_3$, wenn ein $l \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $n = 3l$ oder $n = 3l+1$ gilt. Wir betrachten den verbleibenden Fall $n = 3l + 2$ und die zugehörige Kongruenz

$$A^g_{3l+2}(z) \equiv z^{l+1}(z + g(2))(z^2 - g(3))^l \pmod 3.$$

Genauer schauen wir, was mit $(z^2 - g(3))^l$ abhängig von $g(3)$ passiert:

$$g(3) \equiv 0 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - g(3))^l \equiv z^{2l} \pmod 3;$$
$$g(3) \equiv 1 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - g(3))^l \equiv (z+1)^l(z-1)^l \pmod 3;$$
$$g(3) \equiv 2 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - g(3))^l \equiv (z^2+1)^l \pmod 3;$$

Demnach zerfällt A^g_n vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{F}_3$, wenn $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ gilt. Für $g(3) \equiv 2 \pmod 3$ hingegen nicht, da (z^2+1) keine Nullstellen in $\mathbb{F}_3$ besitzt. □

Das nächste Lemma leiten wir analog zu Lemma 1.37 her. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P^g_n(\alpha) = 0$ und g derart, dass $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ gilt. Wegen $A^g_n(z) = n!P^g_n(z)$ gilt

$$P^g_n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^g_n(\alpha) = 0.$$

Nach Lemma 3.7 ist $A^g_n \in \mathbb{Z}[X]$, normiert und besitzt Grad n. Folglich ist α algebraisch ganz. Mit Korollar 1.35 folgt $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ und mit Lemma 1.32 $Min_\alpha \mid A^g_n$. Gemäß Lemma 3.10 und Korollar 3.12 zerfällt A^g_n modulo $p \in \{2, 3\}$ (bis auf Reihenfolge) eindeutig in Linearfaktoren, weshalb dies für $\overline{Min_\alpha}$ als Teiler ebenfalls gilt. Damit folgt Lemma 3.13.

Lemma 3.13. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P_n^g(\alpha) = 0$ und sei g so gewählt, dass $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ gilt. Dann ist α algebraisch ganz mit $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Für $p \in \{2,3\}$ besitzt das Polynom $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$ eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Linearfaktorzerlegung*

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschieden sind.

Satz 2.20 ist ein Spezialfall des nachfolgenden Satzes (mit $g := \sigma$), dem Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 3.14. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 3$. Für P_n^g mit $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ gilt*

$$P_n^g(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 3$. Nehme an $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $P_n^g(\zeta_m) = 0$. Wir setzen $\alpha = \zeta_m$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und prüfen, ob die Voraussetzung vom Dedekind-Kummer Satz 2.17 (vgl. Abschnitt 2.1) erfüllt ist. Wegen $A_n^g(\alpha) = n! P_n^g(\alpha) = 0$ folgt mit Lemma 3.7, welches insbesondere $A_n^g \in \mathbb{Z}[X]$ ist normiert besagt, dass $\alpha \in \mathcal{O}_K$ ist. Gemäß Satz 2.11 gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, deshalb besitzt jedes $p \in \mathbb{P}$ die Eigenschaft

$$p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]] = [\mathcal{O}_K : \mathcal{O}_K] = 1.$$

Die Voraussetzung des Dedekind-Kummer Satzes ist somit erfüllt. Aus diesem folgt nun für $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[X]$ die Existenz einer (bis auf Reihenfolge) eindeutigen Faktorisierung

$$\overline{Min_\alpha}(X) = \overline{g_1}(X)^{e_1} \cdots \overline{g_r}(X)^{e_r},$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r}$ verschiedene irreduzible normierte Polynome sind. Weiter existiert laut Satz eine Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Hierbei stimmt der Trägheitsgrad f_k von $\mathfrak{p}_k$ mit dem Grad von $\overline{g_k}$ überein $(1 \leq k \leq r)$. Gemäß Satz 2.13 ist eine Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$ bis auf Reihenfolge eindeutig.

Für $p = 2$ folgt aus Lemma 3.13, dass $\overline{g_k}$ $(1 \leq k \leq r)$ Grad 1 hat. Damit ist $f_1 = \cdots = f_r =: f_2^* = 1$. Für $p = 3$ folgt mit Lemma 3.13 analog $f_1 = \cdots = f_r =: f_3^* = 1$.

Es ist $f_2^* = f_3^* = 1$. Mit der Implikation (2.3) aus Korollar 2.19 (vgl. Abschnitt 2.1) folgt daraus allerdings $m \leq 2$ und wir haben einen Widerspruch. Daher war die Annahme $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $P_n^g(\zeta_m) = 0$ zu Beginn falsch und es folgt

$$P_n^g(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 3.14 gilt auch für $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $g(1) = 1$, wie Heim und Neuhauser in ihrer kürzlich eingereichten Arbeit [15, s. 3-6] nachwiesen. Offen ist die Frage, in welchem Verhältnis Satz 3.14 zu Satz 3.4 und Korollar 3.5 von Żmija steht (s. Abschnitt 5.2).

Gibt es konkrete Beispiele für g, in denen der eine Satz ein Ergebnis liefert und der andere nicht? Lemma 3.6 gibt uns dazu einen ersten Anhaltspunkt. Sei g definiert wie in Lemma 3.6, d.h. für eine Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}_0$ mit $c_1 = 1$ sei

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(k) := \sum_{d|k} d \cdot c_d.$$

Dann ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1 + 3c_3 \equiv 1 \pmod 3$. Anwenden von Satz 3.14 liefert folgendes Korollar:

Korollar 3.15. *Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$ mit $c_1 = 1$ und sei*

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(k) := \sum_{d|k} d \cdot c_d.$$

Dann kann Satz 3.14 angewandt werden, d.h. für primitive m-te Einheitswurzeln ζ_m mit $m \geq 3$ folgt

$$P_n^g(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nun geben wir ein ganz konkretes Beispiel für g, das die Forderung von Satz 3.14 erfüllt, jedoch die Forderungen von Satz 3.4 nicht.

Beispiel 3.16. Die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$c_j := \begin{cases} 6, & j \equiv 0 \pmod 3 \\ 1, & j \equiv 1 \pmod 3 \\ 5, & j \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Weiter sei die Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $g(k) := \sum_{d|k} d \cdot c_d$. Gemäß Korollar 3.15 folgt mit Satz 3.14 für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m mit $m \geq 3$

$$P_n^g(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Andererseits betrachten wir g nun mit Satz 3.4. Aufgrund der Konstruktion von g folgt mit Lemma 3.6, dass $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir zeigen, dass Bedingung (i) jedoch nicht erfüllt ist. Man prüft leicht nach: $g(1) = 1$, $g(2) = 11$ und $g(3) = 19$. Mit Beispiel 3.2 finden wir

$$A_3^g(z) = z\left(z^2 + 3g(2)z + 2g(3)\right) = z\left(z^2 + 33z + 38\right) \equiv z(z^2 - 2z - 2) \pmod 5.$$

Sei $f(z) := z^2 - 2z - 2$. Folglich gilt $f \mid A_3^g$ über $\mathbb{F}_5$. Nun ist

$$\begin{aligned} f(0) &\equiv 3 \pmod 5; \\ f(1) &\equiv 2 \pmod 5; \\ f(2) &\equiv 3 \pmod 5; \\ f(3) &\equiv 1 \pmod 5; \\ f(4) &\equiv 1 \pmod 5; \end{aligned}$$

und somit hat f keine Nullstellen in $\mathbb{F}_5$. Das bedeutet f ist irreduzibel in $\mathbb{F}_5$. Bedingung (i) ist somit nicht erfüllt, sodass Satz 3.4 keine Schlussfolgerung erlaubt. Lediglich über Korollar 3.5 folgt für primitive m-te Einheitswurzeln ζ_m mit $385 \mid m$

$$P_n^g(\zeta_m) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Ein kürzeres Beispiel ist $g(k) := k^2$. Wegen $g(3) \equiv 0 \pmod 3$ ist Satz 3.14 anwendbar. Jedoch ist $P_2^g(1) = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ und somit kann weder Korollar 3.5 noch Satz 3.4 benutzt werden. Die Frage, ob es ein g existiert, sodass Korollar 3.5 oder Satz 3.4 anwendbar ist, jedoch Satz 3.14 nicht, ist weiterhin offen. Ein geeignetes g zu finden, wäre aufgrund der Forderung $P_n^g(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ nicht trivial. Bei Satz 3.4 kommt hinzu, dass für die Erfüllung der Bedingungen (i) bis (iii) ein abstrakter Beweis nötig ist, oder sehr viele Fälle anzugeben sind. Beispielsweise gibt es gemäß [31, s. 1078] genau $\frac{1}{4}(7^4 - 7^2) = 1176$ normierte irreduzible Polynome von Grad 4 über $\mathbb{F}_7$. Allgemeiner ist die Anzahl aller normierten irreduziblen Polynome über $\mathbb{F}_p$ mit $p \in \mathbb{P}$ von Grad n gegeben durch (vgl. [4, s. 49-51])

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{\frac{n}{d}},$$

wobei μ die *Möbiusfunktion* ist, definiert durch

$$\mu(d) := \begin{cases} 1, & \text{falls } d = 1, \\ (-1)^r, & \text{falls } d \text{ ein Produkt von genau } r \text{ verschiedenen Primfaktoren ist,} \\ 0, & \text{falls } p^2 \mid d \text{ für eine Primzahl } p. \end{cases}$$

3.3 Verbindung von $P_n^g(z)$ zu den assoziierten Laguerre Polynomen

In diesem Abschnitt stellen wir die Verbindung von P_n^g zu den assoziierten Laguerre-Polynomen (einer Verallgemeinerung der Laguerre-Polynome) her. Dazu wird hier eine Auswahl von Ergebnissen aus dem Artikel [11] von Heim, Luca und Neuhauser präsentiert. Im Artikel wird P_n^g für eine Auswahl interessanter Funktionen $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(1) = 1$ untersucht. Der interessierte Leser findet dort mehr Details und weitere Resultate.

Definition 3.17. Das *n-te assoziierte Laguerre-Polynom* $L_n^{(\alpha)} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bgzl. $\alpha > -1$ ist definiert durch

$$L_n^{(\alpha)}(z) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-z)^k}{k!}.$$

Die Familie der Laguerre-Polynome sind der Spezialfall $L_n^{(0)}$. Für das nächste Lemma vergleiche auch [12].

Lemma 3.18. *Für $n \in \mathbb{N}$ und $g = id$ gilt*

$$P_n^{id}(z) = \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_{n-k}^{id}(z) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} z^k = z \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Die Koeffizienten von $n! P_n^{id}$ sind sogenannte Lah-Zahlen $\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$. Die Verbindung zu den assoziierten Laguerre-Polynomen zeigt das folgende Lemma auf:

Lemma 3.19. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$P_n^{id}(z) = \frac{z}{n} L_{n-1}^{(1)}(-z).$$

Lemma 3.19 schlägt die Brücke von der Theorie der assoziierten Laguerre-Polynome zu P_n^{id}. Zusammen mit der von Schnur in [28] gezeigten Irreduzibelität von $L_{n-1}^{(1)}$ folgt der nächste Satz.

Satz 3.20. *$\frac{P_n^{id}(z)}{z}$ ist irreduzibel für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Außerdem folgt wegen den Eigenschaften (s. [5]) der Familie der orthogonalen Polynome $L_{n-1}^{(1)}$ folgendes Resultat über die Nullstellen von P_n^{id}.

Satz 3.21. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen von P_n^{id} sind alle einfach, reell und nicht positiv. Zusätzlich verschränken sich die negativen Nullstellen von n zu $n+1$. Mit verschränken ist gemeint: Wenn $s_{n,1} < \cdots < s_{n,n-1} < s_{n,n} = 0$ die Nullstellen von P_n^{id} sind, dann gilt $s_{n+1,1} < s_{n,1} < s_{n+1,2} < s_{n,2} < \cdots < s_{n+1,n-1} < s_{n,n-1} < s_{n+1,n} < 0$.*

Heim, Luca und Neuhauser zeigten, dass wenn g ein Polynom von Grad d ist, eine Rekurrenzrelation der Ordnung höchstens $d+2$ existiert. Insbesondere fanden sie für P_n^{id} folgende Rekurrenzrelation der Ordnung 3:

Satz 3.22. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Drei-Term-Rekurrenzrelation:*

$$P_{n+1}^{id}(z) = \frac{1}{n+1}\left((2n+z)P_n^{id}(z) - (n-1)P_{n-1}^{id}(z)\right), \quad P_1^{id}(z) = zP_0^{id}(z), \quad P_0^{id}(z) = 1.$$

Es wird vermutet, dass wegen $k \le \sigma(k) \le k^2$ Eigenschaften von P_n^{σ} duch jene von P_n^{g} mit $g(k) = k$ und $g(k) = k^2$ hergeleitet werden können.

4 Nullstellenverteilung von $P_n(z)$

In diesem Kapitel schauen wir uns weitere Eigenschaften der Nullstellen von P_n an. Dabei betrachten wir einige Plots, um Sachzusammenhänge zu veranschaulichen und Beobachtungen zu treffen. In den Plots werden Kommazahlen mit einem Punkt, statt mit einem Komma notiert (z.B. 0.5 statt $0,5$). Dies liegt an der Standardeinstellung des verwendeten LaTeX-Pakets TikZ. Im Kapitel wird mehrfach auf Wolfram Mathematica verwiesen. Damit ist die Software Wolfram Mathematica (Wolfram 14.1) vom Unternehmen Wolfram Research gemeint. Einige Ergebnisse dieses Kapitels basieren auf Berechnungen mit dieser Software, z.B. die Berechnung der Nullstellen für die Plots. Für die Berechnung der Nullstellen von P_n bis $n = 500$ kann ich Wolfram Mathematica wärmstens empfehlen. Auf meinem privaten Rechner hat es einen knappen Tag gedauert, alle Nullstellen von P_n bis $n = 500$ zu berechnen.

4.1 Realteile der Nullstellen

Wir schauen uns exemplarisch einen Plot mit den Nullstellen von P_n für $1 \leq n \leq 50$ an.

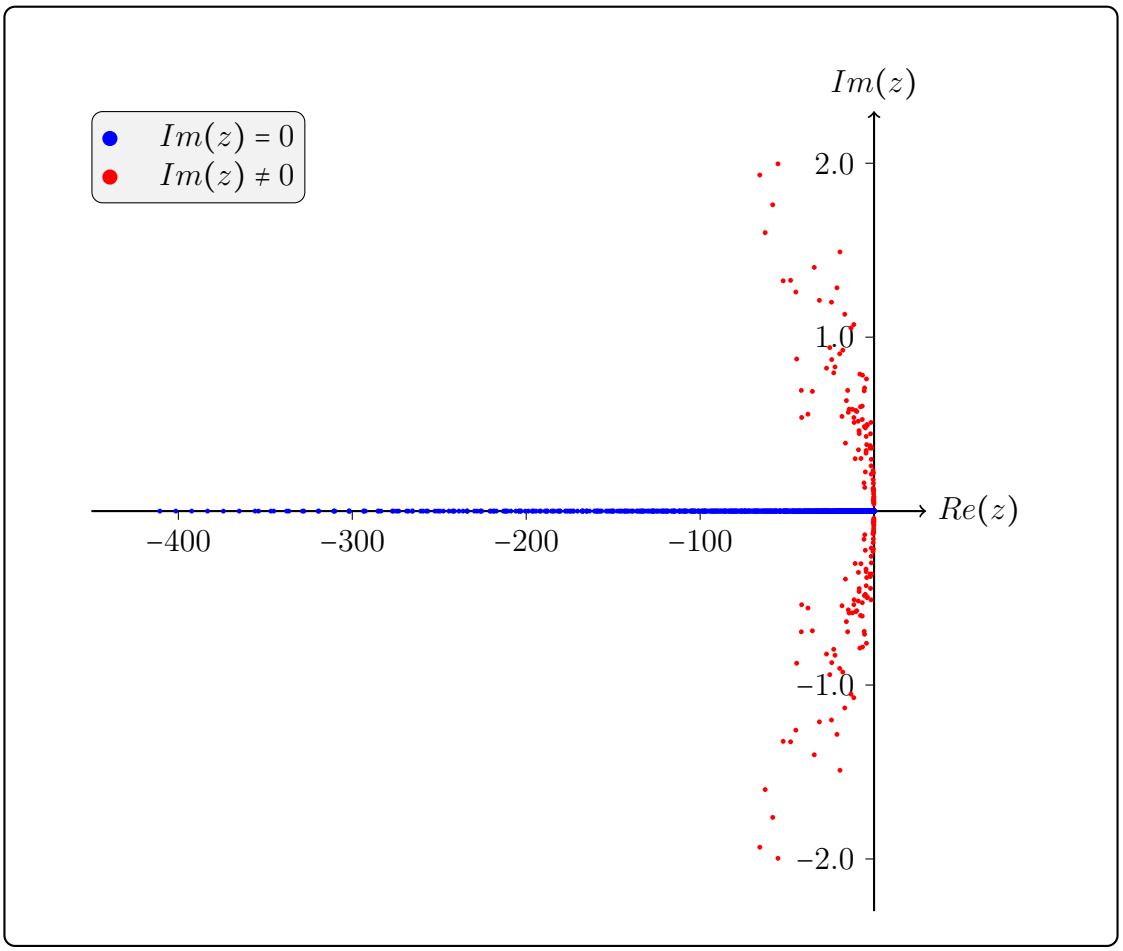

Abbildung 2: Nullstellen von P_n bis $n = 50$.

In Abbildung 2 fällt auf, dass stets $Re(z) \leq 0$ gilt. Folgende Definition ist aus [14, s. 4] übernommen:

Definition 4.1. Ein Polynom mit reellen und nicht-negativen Koeffizienten heißt *Hurwitz-Polynom*, wenn der Realteil der Nullstellen stets negativ ist.

Gemäß [13, s. 11] wurde numerisch nachgewiesen, dass P_n für $1 \leq n \leq 1500$ fast (bis auf die Nullstelle $z = 0$) ein Hurwitz-Polynom ist. In [15, s. 2] trafen Heim und Neuhauser folgende Vermutung:

Vermutung 4.2 (Heim, Neuhauser). *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{P_n(z)}{z}$ ein Hurwitz-Polynom und die Nullstellen sind einfach.*

4.2 Eine obere Schranke für den Betrag von Nullstellen

In [14] zeigten Heim und Neuhauser $P_n(z) \neq 0$ für alle $|z| > s_n$, wobei

$$s_n := 9,7226 \cdot (n-1) \tag{4.1}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Dabei wiesen Sie auch nach, dass der Koeffizient in (4.1) größer als $9,72245$ sein muss. Die nächste Abbildung präsentiert exemplarisch die Nullstellen von P_{100} und zeigt, dass $s_{100} = 962,5374$ eine obere Schranke für die Beträge darstellt.

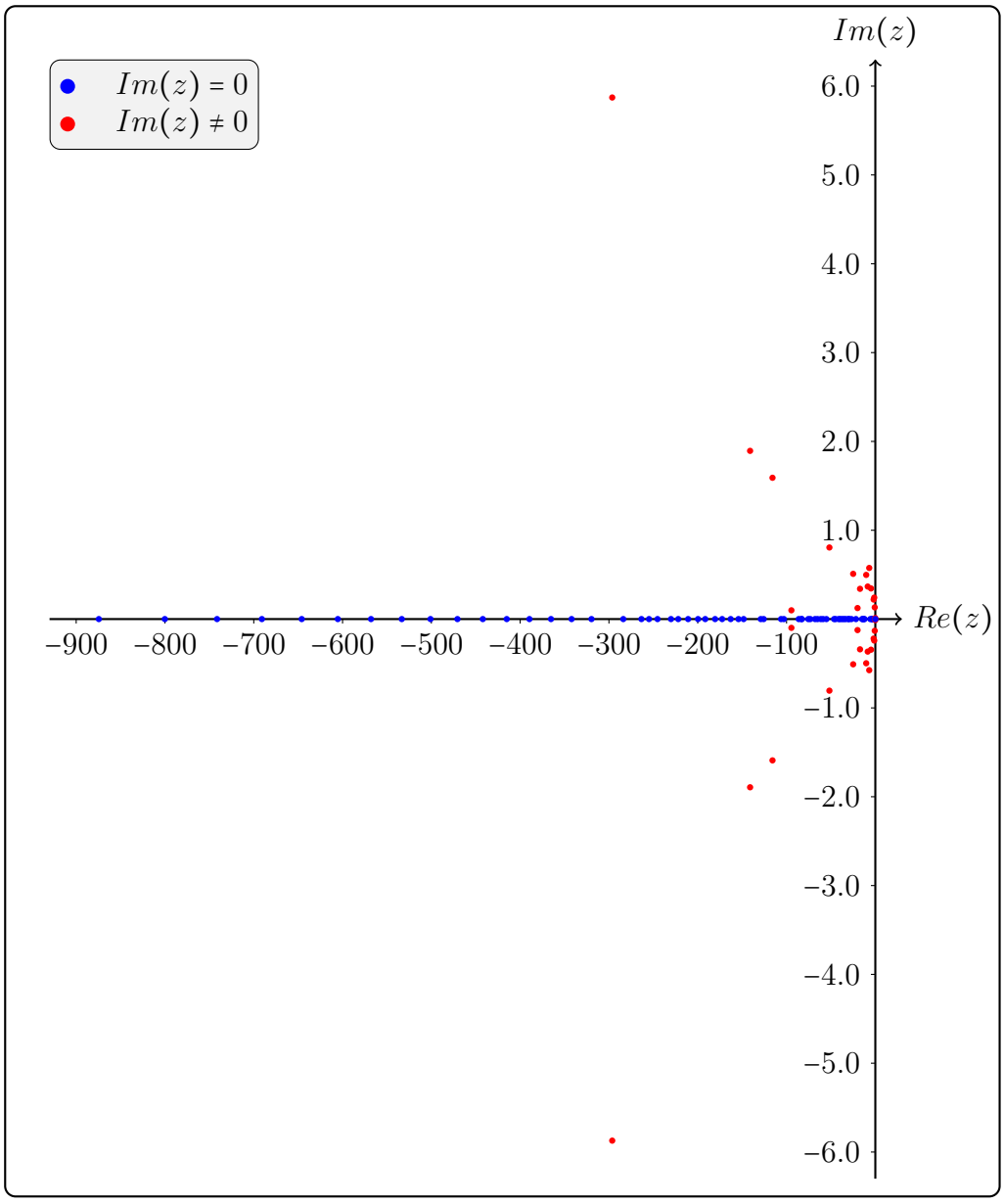

Abbildung 3: Nullstellen von P_{100}.

In Abbildung 3 fällt auf, dass die Imaginärteile mit $|Im(z)| < 6$ betraglich eher klein ausfallen und die betragsgrößte Nullstelle reell ist. Mit Wolfram Mathematica konnte bis $n = 500$ nachgewiesen werden, dass die betragsgrößte Nullstelle immer reell ist.

Vermutung 4.3. *Die betraglich größte Nullstelle von P_n ist reell für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Weiter ist in Abbildung 3 zu sehen, dass die betragsgrößte echt komplexe Nullstelle weit von der betragsgrößten Nullstelle entfernt ist. Dies motiviert die Suche nach einer präziseren Schranke für echt komplexe Nullstellen. Dabei stellt sich auch die Frage, wann echt komplexe Nullstellen überhaupt auftreten.

Definition 4.4. Die Anzahl echt komplexer Nullstellen von P_n ist gegeben durch

$$c_n := \left|\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : P_n(z) = 0\}\right|.$$

Die nachfolgende Abbildung skizziert einige Werte.

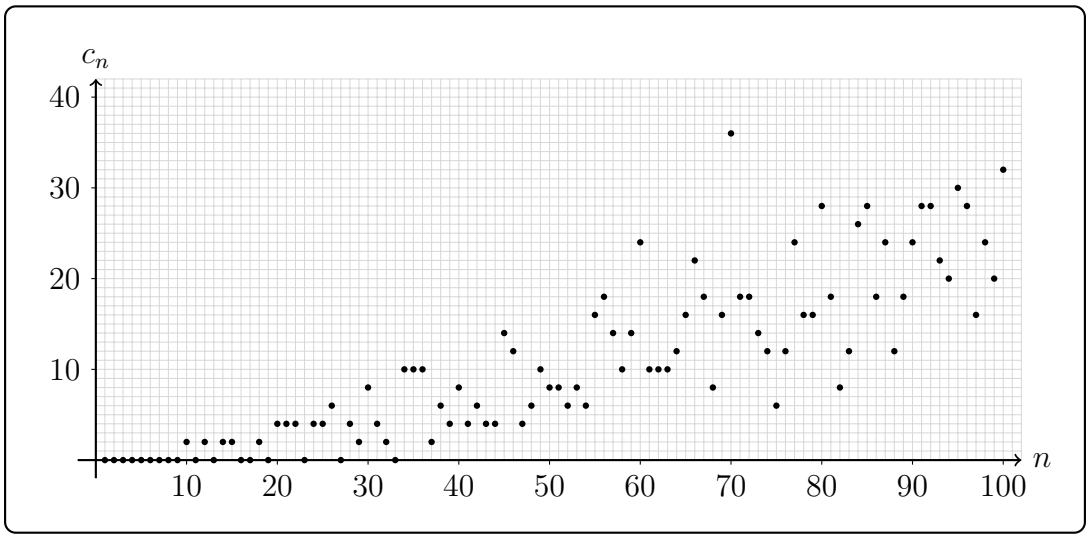

Abbildung 4: Werte von c_n bis $n = 100$.

Abbildung 4 zeigt eine durchschnittliche Zunahme von c_n für wachsendes n. Mit Wolfram Mathematica wurde gezeigt, dass sich dieser Trend bis mindestens $n = 500$ fortsetzt und für $n \leq 500$ gilt:

$$c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 27, 33\}.$$

In Anbetracht dessen folgende Vermutung:

Vermutung 4.5. *Die Absolutzahl echt komplexer Nullstellen von P_n steigt durchschnittlich für wachsendes n. Für $n \geq 34$ besitzt P_n eine echt komplexe Nullstelle.*

Bevor wir die Beträge echt komplexer Nullstellen näher untersuchen, folgen ein paar Definitionen.

Definition 4.6. Sei $N_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} := \{n \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ mit } P_n(z) = 0\}$. Wir definieren die Funktion

$$f : N_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) := \max\{|z| : z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ mit } P_n(z) = 0\}.$$

Außerdem verallgemeinern wir s_n aus (4.1) zu

$$s_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s_x := 9,7226 \cdot (x - 1).$$

Weiter definieren wir

$$t_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t_x := 3,4 \cdot (x - 10) + f(10) \approx 3,4 \cdot (x - 10) + 5,5078. \tag{4.2}$$

Wir betrachten einige Funktionswerte der soeben definierten Funktionen.

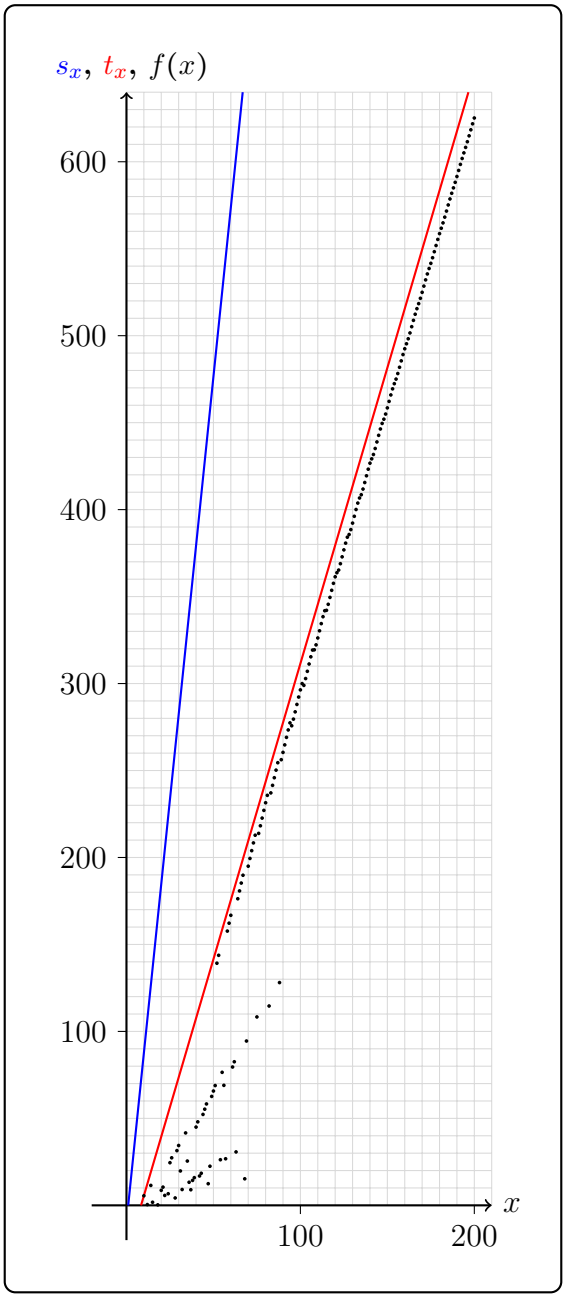

Abbildung 5: Werte von s_x, t_x und $f(x)$ für $1 \leq x \leq 200$. Bei $f(x)$ wurden nur Werte für $x \in [1, 200] \cap N_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$ eingetragen.

In Abbildung 5 sehen wir, dass die Punkte von f ab $x = 89$ deutlich weniger streuen und sich augenscheinlich einer Geraden nähern. Berechnungen mit Wolfram Mathematica zeigten, dass der Graph von f auf $[90, 500] \subsetneq \mathbb{N}$ keine großen Ausreißer mehr hat. Allerdings nimmt die Steigung im Durchschnitt weiter zu.

Definition 4.7. Die durchschnittliche Steigung von f auf einem Intervall $[a,b] \subseteq [100,500] \subsetneq N_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$ ist gegeben durch

$$m_{[a,b]} := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Auf Wolfram Mathematica gestützte Berechnungen lieferten folgende durchschnittliche Steigungen:

$[a,b]$	$[100,200]$	$[200,300]$	$[300,400]$	$[400,500]$
$m_{[a,b]}$	$\approx 3,2880$	$\approx 3,3486$	$\approx 3,3714$	$\approx 3,3845$

Tabelle 2: Durchschnittliche Steigung von f auf verschiedenen Intervallen.

Die wachsende Steigung aus Tabelle 2 macht den Versuch schwer, $f(n)$ präzise von oben durch eine Gerade abzuschätzen. Auch wenn die Steigung von Intervall zu Intervall weniger stark wächst. Für $n \in N_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$ mit $n \leq 500$ gilt jedoch (keine maximal präzise Abschätzung)

$$f(n) \leq t_n < s_n.$$

Die Abschätzung gilt auch für das ungefähre t_x aus (4.2). Zwecks Lesbarkeit der Ergebnisse schließen wir den Abschnitt mit folgendem Korollar:

Korollar 4.8. *Sei $n \in \{1,\ldots,500\}$. Dann gilt $P_n(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit*

$$|z| > 3,4 \cdot (x-10) + 5,5078.$$

4.3 Abstand der Nullstellen zum Einheitskreis

Wir wissen, dass -1 unter den Einheitswurzeln die einzige Nullstelle von P_n ist und wann sie auftritt (vgl. Korollar 2.25). Doch gibt es weitere Nullstellen auf dem Einheitskreis? Heim und Neuhauser vermuten Folgendes (vgl. [15, s. 7]):

Vermutung 4.9 (**Heim, Neuhauser**). *Sei $P_n(z) = 0$ mit $|z| = 1$, dann ist $z = -1$.*

In diesem Abschnitt werden wir Vermutung 4.9 untersuchen und kritisch hinterfragen. Zum einen werden wir zeigen, dass Nullstellen α von P_n, die auf dem Einheitskreis liegen, immer Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ sind. Und zum anderen werden wir beweisen, dass für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m mit $m \geq 7$ auch Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}$ existieren, die von den m-ten Einheitswurzeln verschieden sind. Damit scheint es durchaus möglich, dass andere Nullstellen auf dem Einheitskreis auftreten können. Auch werden wir exemplarisch prüfen, wie sich die Abstände der Nullstellen zum Einheitskreis für P_n bis $n = 500$ verhalten. Wir beginnen mit dem Dirichletschen Einheitensatz, der uns einen Überblick über die Einheiten verschaffen wird.

Nachfolgende Definition und der Dirichletsche Einheitensatz sind aus [25, s. 41; s. 44] übernommen.

Definition 4.10. Für einen Zahlkörper K bezeichnen wir mit r die Anzahl der reellen Einbettungen $\rho : K \longrightarrow \mathbb{R}$ und s die Anzahl der Paare $\kappa, \overline{\kappa} : K \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex konjugierter Einbettungen.

Satz 4.11 (**Dirichletscher Einheitensatz**). *Sei K ein Zahlkörper und $\mu(K)$ bezeichne die endliche zyklische Gruppe der in K gelegenen Einheitswurzeln. Die Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^\times$ von $\mathcal{O}_K$ ist das direkte Produkt von $\mu(K)$ und einer freien abelschen Gruppe F_t vom Rang $t = r + s - 1$.*

Mit anderen Worten: Es gibt Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, $t = r + s - 1$, Grundeinheiten genannt, derart, dass sich jede weitere Einheit ε eindeutig als ein Produkt

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{\nu_1} \cdots \varepsilon_t^{\nu_t}$$

mit einer Einheitswurzel ζ und ganzen Zahlen ν_i ausdrücken lässt.

Bemerkung 4.12. Sei F_t die freie abelsche Gruppe vom Rang t aus Satz 4.11. Für $t \geq 1$ ist jedes Element $f \in F_t$ durch seine Grundeinheiten darstellbar mit

$$f = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdots \varepsilon_t^{\nu_t}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\psi : F_t \longrightarrow \mathbb{Z}^t, \quad \psi(\varepsilon_1^{\nu_1} \cdots \varepsilon_t^{\nu_t}) = (\nu_1, \ldots, \nu_t)$$

ein Isomorphismus zwischen $(F_t, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}^t, +)$ und daher

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^t.$$

Vorbereitend zum nächsten Satz zitieren wir noch folgendes Lemma zur Eulerschen φ–Funktion [20, s. 247]:

Lemma 4.13. *Es gilt:*

(i) Die Eulersche φ-Funktion ist eine sogenannte arithmetische Funktion, das heißt, sie ist multiplikativ für teilerfremde Produkte:

Sind a und b teilerfremd, so gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

(ii) Ist p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1).$$

Nun können wir folgendes Lemma zeigen.

Lemma 4.14. *Es gilt:*

(i) Sei K ein Zahlkörper. Jedes $z \in \mathcal{O}_K$ mit $|z| = 1$ ist auch ein Element der Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^\times$ von $\mathcal{O}_K$.

(ii) Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 7$ und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Dann existieren Elemente unendlicher Ordnung in $\mathcal{O}_K^\times$.

Beweis. Zu (i): Sei K ein Zahlkörper und $z \in \mathcal{O}_K$ mit $|z| = 1$. Nach der Definition des Ganzheitsrings existiert ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(z) = 0$. Für Polynome mit ausschließlich reellen Koeffizienten gilt bekanntlich (leicht nachzurechnen), dass Nullstellen unter komplexer konjugation Nullstellen bleiben. Daher ist $\overline{z} \in \mathcal{O}_K$ mit $|\overline{z}| = 1$. Es ist $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ und somit $z^{-1} = \overline{z}$. Damit ist $z \in \mathcal{O}_K^\times$.

Zu (ii): Sei $m \geq 7$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $\varphi(m)$ gerade ist. Angenommen m hat die Primfaktorzerlegung

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}, \quad e_i \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 4.13 (ii) gilt

$$\varphi(p_i^{e_i}) = p_i^{e_i-1}(p_i - 1).$$

Für $p_i \neq 2$ ist $\varphi(p_i^{e_i})$ daher gerade. Und für $p_i = 2$ ist $\varphi(p_i^{e_i})$ gerade, wenn $e_i \geq 2$ ist. Wegen $m > 2$ finden wir mit Lemma 4.13 (i)

$$\varphi(m) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}\right) = \varphi(p_1^{e_1}) \cdots \varphi(p_n^{e_n}) \equiv 0 \pmod 2.$$

Als nächstes zeigen wir $\varphi(m) \geq 4$. Nehme an für einen Primfaktor $p_k \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ mit $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $p_k \geq 5$. Dann finden wir mit Hilfe von Lemma 4.13

$$\varphi(m) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}\right) = \varphi(p_1^{e_1}) \cdots \varphi(p_n^{e_n}) \geq \varphi(p_k^{e_k}) = p_k^{e_k-1}(p_k - 1) \geq (p_k - 1) \geq 4.$$

Nehme nun an $p_1, \ldots, p_n < 5$. Dann existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$, sodass $m = 2^a \cdot 3^b$.

Wir betrachten folgende Fälle:
$b \geq 2$: Dann ist

$$\varphi(m) = \varphi(2^a \cdot 3^b) = \varphi(2^a)\varphi(3^b) \geq \varphi(3^b) = 3^{b-1} \cdot 2 \geq 6.$$

$b = 1$: Dann ist $m = 2^a \cdot 3$ und folglich $a \geq 2$.

$$\varphi(m) = \varphi(2^a \cdot 3) = \varphi(2^a)\varphi(3) = 2^{a-1} \cdot 2 \geq 4.$$

$b = 0$: Dann ist $m = 2^a$ mit $a \geq 3$.

$$\varphi(m) = \varphi(2^a) = 2^{a-1} \geq 4.$$

Insgesamt haben wir gezeigt

$$4 \leq \varphi(m) \equiv 0 \pmod 2. \tag{4.3}$$

Sei nun ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel. Wegen $m \geq 7$ ist $\zeta_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Deshalb gibt es keine reellen Einbettungen von $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$, d.h. $r = 0$. Und die komplexen Einbettungen von K werden eindeutig durch das Abbilden von ζ_m auf die Nullstellen des m-ten Kreisteilungspolynoms ϕ_m bestimmt. Wegen Satz 2.10 ist $\deg(\phi_m) = \varphi(m)$. Da jede komplexe Einbettung κ eine weitere komplexe Einbettung $\overline{\kappa}$ induziert, ist $s = \frac{\varphi(m)}{2} \overset{(4.3)}{\geq} 2$. Wir halten fest:

$$r = 0, \quad s \geq 2.$$

Wir wenden den Dirichletschen Einheitensatz an und erhalten wegen $t = r + s - 1 \geq 1$ und Bemerkung 4.12

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^t,$$

wobei $\mu(K)$ die endliche zyklische Gruppe der in K gelegenen Einheitswurzeln ist. Da jeder vom Nullvektor verschiedene Vektor aus $\mathbb{Z}^t$ unendliche Ordnung hat, existieren auch in $\mathcal{O}_K^\times$ Elemente unendlicher Ordnung. □

Für eine primitive m-te Einheitswurzel ζ_m und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$ ist wegen $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ nach Lemma 4.14 (i) jede m-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}_K^\times$ enthalten ($\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ gilt gemäß Satz 2.11). Für $m \geq 7$ gilt nach Lemma 4.14 (ii), dass $\mathcal{O}_K^\times$ auch Elemente unendlicher Ordnung enthält. Da Einheitswurzeln endliche Ordnung haben, müssen diese Elemente andere sein. Damit haben wir folgendes Korollar:

Korollar 4.15. *Sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel mit $m \geq 7$ und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Dann enthält die Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^\times$ von $\mathcal{O}_K$ auch andere Elemente als die m-ten Einheitswurzeln.*

Für Nullstellen α von P_n, die auf dem Einheitskreis liegen, folgt durch Kombination von Korollar 1.28 (i) (s. Abschnitt 1.3) mit Lemma 4.14 (i), dass α eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ ist. In Korollar 4.15 haben wir gesehen, dass für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m mit $m \geq 7$ auch Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}$ existieren, die von den m-ten Einheitswurzeln verschieden sind. Daher scheint es durchaus möglich, dass andere Nullstellen auf dem Einheitskreis auftreten können. Wir betrachten nun exemplarisch die Nullstellen von P_n bis $n = 100$ nahe des Einheitskreises.

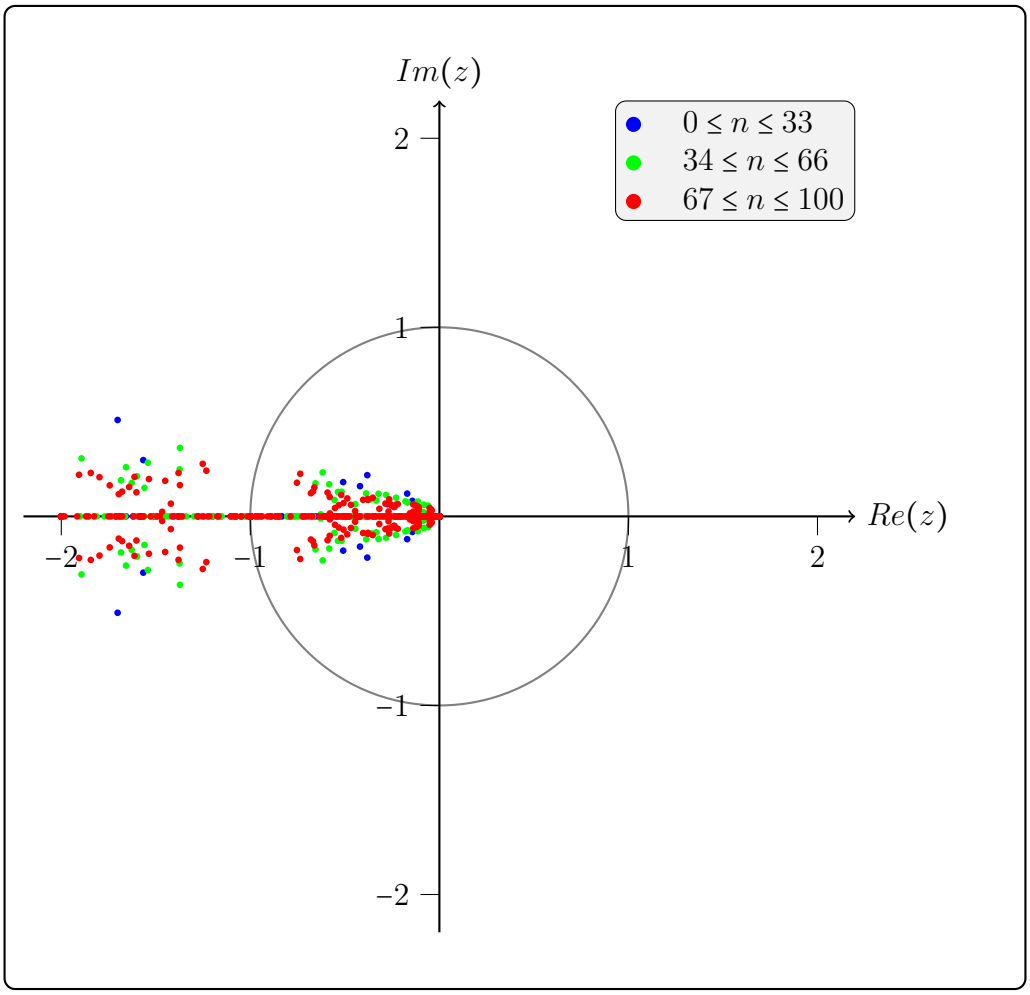

Abbildung 6: Nullstellen von P_n mit $|z| \leq 2$ bis $n = 100$.

In Abbildung 6 scheint es, dass mit wachsendem n Nullstellen auftreten, die näher an den Einheitskreis heranrücken. Wir untersuchen die Abstände der Nullstellen zum Einheitskreis etwas genauer, jedoch lassen wir die wiederkehrende Nullstelle $z = -1$ dabei außer Acht.

Definition 4.16. Wir definieren

$$Z_n := \{z \in \mathbb{C} : P_n(z) = 0\} \setminus \{-1\}, \quad d_n := \min_{z \in Z_n} \{||z| - 1|\}.$$

Das heißt d_n bezeichnet den Abstand vom Einheitskreis zur nächstgelegenen Nullstelle von P_n ausgenommen der -1.

Ergänzend zu Abbildung 6 betrachten wir in der nächsten Abbildung d_n bis $n = 100$.

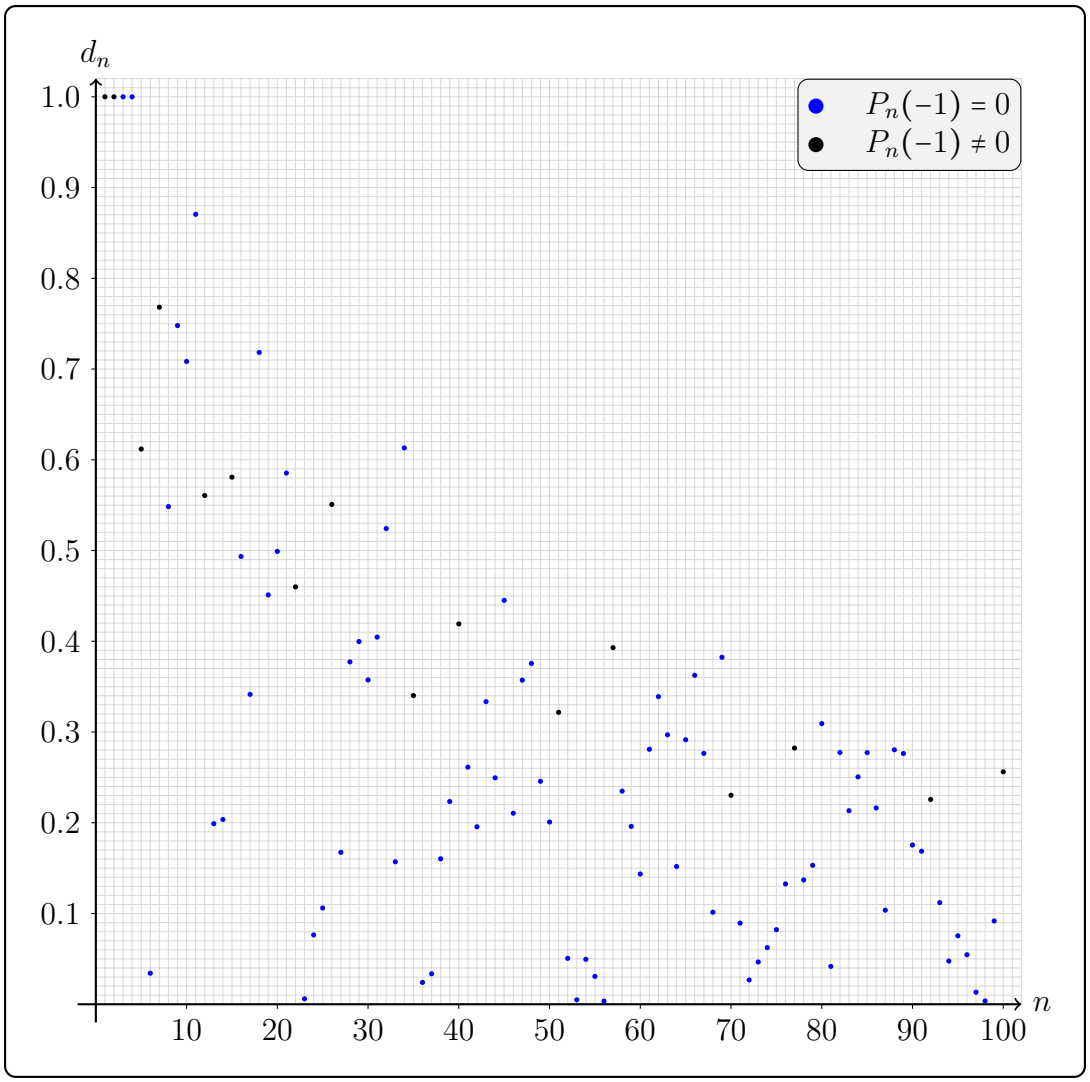

Abbildung 7: Werte von d_n bis $n = 100$.

Wir sehen in Abbildung 7, dass d_n für wachsendes n durchschnittlich kleiner wird. Aufgrund der Schwankungen konzentrieren wir uns weiter auf durchschnittliche Abstände.

Definition 4.17. Für ein Intervall $[a, b] \subsetneq \mathbb{N}$ ist der durchschnittliche Abstand vom Einheitskreis zu Z_n gegeben durch

$$d^{\varnothing}_{[a,b]} := \frac{d_a + \cdots + d_b}{b - a + 1}.$$

Auf Wolfram Mathematica gestützte Berechnungen lieferten

$$\min_{n\in[1,500]} \{d_n\} = d_{386} \approx 0,0006. \tag{4.4}$$

Weiter ergaben sich folgende durchschnittlichen Abstände:

$[a,b]$	$[1,100]$	$[101,200]$	$[201,300]$	$[301,400]$	$[401,500]$
$d^{\varnothing}_{[a,b]}$	$\approx 0,2982$	$\approx 0,1331$	$\approx 0,0915$	$\approx 0,0819$	$\approx 0,0679$

Tabelle 3: Durchschnittlicher Abstand vom Einheitskreis zu Z_n für verschiedene Intervalle.

Die Quintessenz der Ergebnisse halten wir in folgendem Korollar fest:

Korollar 4.18. *Der durchschnittliche Wert von d_n auf den Intervallen $[1,100]$, $[101,200]$, ... , $[401,500] \subsetneq \mathbb{N}$ nimmt von Intervall zu Intervall ab. Sein Minimum erreicht d_n dabei bei $n = 386$ mit $d_{386} \approx 0,0006$.*

Die Eigenschaft (4.4) ist aufgrund der durchschnittlich sinkenden Abstände überraschend. Die Gültigkeit von Vermutung 4.9 bleibt weiter ungeklärt.

5 Weiterer Forschungsstand und offene Fragen

5.1 Potenzen der Dedekindschen Etafunktion

Für die Dedekindschen Etafunktion $\eta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt [10, s. 446]:

$$\eta(\omega)^r = q^{\frac{r}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^r = q^{\frac{r}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-r)q^n, \quad q := e^{2\pi i\omega}.$$

Der Bezug zu den D'Arcais Polynomen besteht darin, dass der n-te Fourier Koeffizient genau dann verschwindet, wenn $P_n(-r) = 0$ ist. Dazu nun ein grober Überblick zum Forschungsstand für $r \in \mathbb{Z}$. Wir beginnen mit zwei Definitionen aus [26, s. 1023].

Definition 5.1. Eine Reihe $x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$ mit $0 < \nu \in \mathbb{Q}$ und Koeffizienten gegeben durch $c : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *lakunär* (lacunary), wenn

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\{n \mid n \le t \text{ und } c(n) \neq 0\}|}{t} = 0$$

gilt.

Definition 5.2. Eine Reihe $x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$ mit $0 < \nu \in \mathbb{Q}$ und Koeffizienten gegeben durch $c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *superlakunär* (superlacunary), wenn sie in der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(an^2+bn+c)x^{an^2+bn+c},$$

mit $a > 0$ und $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann, wobei d eine Funktion $d : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist mit

$$an^2 + bn + c \mapsto d(an^2+bn+c) \in \mathbb{C}.$$

Für den Rest des Abschnitts dient der Artikel [17] von Heim, Neuhauser und Weisse als Quelle, auf welchen der interessierte Leser für mehr Details verwiesen sei. Für $r \leq 0$ sind die Fourier Koeffizienten entweder trivial (für $r = 0$) oder alle positiv. Für $r \geq 0$ ist hingegen wenig bekannt. Für $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\eta^r \text{ ist superlakunär} \Leftrightarrow r \in \{1, 3\}$$

und wir wissen genau, wann für η und η^3 die Fourier Koeffizienten verschwinden (vgl. (0.2)). Serre bewies [29] für gerade $r \in \mathbb{N}$:

$$\eta^r \text{ ist lakunär } \Leftrightarrow r \in S_{even} := \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 26\}.$$

Weiter dokumentiere Serre (basierend auf teils unveröffentlichten Arbeiten von Atkin, Newman und Cohen) Paare (r, n) für die $P_n(-r) = 0$ gilt. Serre's Tabelle wurde von Heim, Neuhauser und Weisse in [17] erweitert. Grundlage dafür waren Computerberechnungen mit Hilfe der FLINT-Bibliothek [8][9] und die Hecke-Theorie der Modulformen halbganzzahligen Gewichts. Mit Hilfe letzterer wurde folgende Proposition bewiesen:

Proposition 5.3. *Sei $1 \leq r < 24$ eine ungerade ganze Zahl. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, sodass $D_0 := 24n_0 + r$ die Bedingung $p^2 \nmid D_0$ für alle Primzahlen $p \neq 2, 3$ erfüllt.*

$$\mathcal{N}_r(n_0) := \left\{ n_0 l^2 + \frac{r(l^2 - 1)}{24} \mid l \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(l, 2 \cdot 3) = 1 \right\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Angenommen, es gilt $P_{n_0}(-r) = 0$. Dann gilt $P_n(-r) = 0$ für alle $n \in \mathcal{N}_r(n_0)$. Solche Zahlen n_0 nennen wir Quellen (sources).

Kurzgesagt findet man für ungerades $1 \leq r < 24$ eine Quelle n_0, so verschwindet der n-te Fourier Koeffizient von η^r für alle $n \in \mathcal{N}_r(n_0)$. Insbesondere verschwinden damit unendlich viele Fourier Koeffizienten. Für $n \leq 10^{10}$ hat $r = 5$ genau 6352 Quellen. Die erweiterte Serre-Tabelle sieht wie folgt aus, sie gilt für ungerade $r \in \mathbb{N}$.

r	Quellen n_0	$\mathcal{N}_r(n_0)$	Geprüft bis
5	$1560, 1802, \ldots$	$\{n_0 l^2 + 5 \cdot \frac{l^2-1}{24}, (l, 2 \cdot 3) = 1, l \in \mathbb{N}\}$	10^{10}
7	28017	$\{28017 l^2 + 7\frac{l^2-1}{24}, (l, 2 \cdot 3) = 1, l \in \mathbb{N}\}$	10^{10}
9	–	$\varnothing$	10^{10}
11	–	$\varnothing$	10^{10}
13	–	$\varnothing$	10^{10}
15	53	$\{429\binom{l}{2} + 53, l \in \mathbb{N}\}$	10^{10}
$17 \leq r \leq 27$	–	$\varnothing$	10^9
$29 \leq r \leq 549$	–	$\varnothing$	10^8

Tabelle 4: Erweiterte Serre-Tabelle [17, s. 5] für ungerade $r \in \mathbb{N}$.

Gemäß Tabelle 4 verschwinden für $r \in \{5, 7, 15\}$ unendlich viele Fourier Koeffizienten von η^r und für ungerades $r > 15$ ist unbekannt, ob Fourier Koeffizienten verschwinden.

Für gerades $r \in \mathbb{N} \setminus S_{even}$ mit $12 \leq r \leq 550$ wurde durch numerische Berechnungen $P_n(-r) \neq 0$ für $n \leq 10^7$ gezeigt. Außerdem gibt es für gerade r ein paar Vermutungen. Lehmer beobachtete für $r = 24$, dass der kleinst mögliche Index n eines verschwindenden Fourier Koeffizients (falls ein solcher existiert) eine Primzahl sein muss [22]. Er kam zu folgender Vermutung:

Vermutung 5.4 (**Lehmer (1947)**). *Für η^{24} sind alle Fourier Koeffizienten ungleich null. Oder anders ausgedrückt die Ramanujan Tau-Funktion $\tau(n) = P_{n-1}(-24)$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{N}$.*

Lehmers Vermutung wurde bis $n \approx 8 \cdot 10^{23}$ nachgeprüft und stimmt bis dahin. Ono fand, dass die für $r = 24$ von Lehmer gefundene Primindex-Notwendigkeit auch für $r = 12$ gilt [26]. Ono spekulierte, ob daher auch für η^{12} kein Fourier Koeffizient verschwindet.

Vermutung 5.5. *Für η^{12} sind alle Fourier Koeffizienten ungleich null.*

Eine Vermutung von Maeda [19] impliziert, dass für η^{48} kein Fourier Koeffizient verschwindet.

Vermutung 5.6. *Für η^{48} sind alle Fourier Koeffizienten ungleich null.*

Vermutung 5.6 ist für $n \leq 5 \cdot 10^9$ geprüft worden und soweit korrekt. Alle drei Vermutungen sind jedoch noch offen. Tatsächlich ist für jedes gerade $r \in \mathbb{N} \setminus S_{even}$ unbekannt, ob Fourier Koeffizienten von η^r verschwinden.

5.2 Nullstellen von $P_n^g(z)$

Am 07.09.2025 reichten Heim und Neuhauser einen Artikel [15] ein, in dem neue Ergebnisse zu den Nullstellen von P_n^g und offene Fragen zu finden sind. Sie bewiesen unter anderem Satz 3.14 (s. Abschnitt 3.2). Außerdem fanden sie Eigenschaften über Nullstellen außerhalb des Einheitskreises heraus. Wir geben dazu zwei Resultate aus [15, s. 3] wieder. Die Notation wurde angepasst.

Definition 5.7. Sei $\mathcal{Z}_n^g$ die Menge der Nullstellen von P_n^g. Die Menge aller Nullstellen ist eine Teilmenge der Menge der algebraisch ganzen Zahlen und wird bezeichnet durch

$$\mathcal{Z}^g = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n^g \subsetneq \overline{\mathbb{Z}}.$$

Satz 5.8. *Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $g(1) = 1$. Weiter sei ζ_m eine m-te primitive Einheitswurzel mit $m \geq 3$ und $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Dann gilt Folgendes:*

(i) Es existiere eine Primzahl $p \neq 2$ mit $p \mid m$. Dann gilt

$$\{\zeta_m + 2\beta : \beta \in \mathcal{O}_K\} \cap \mathcal{Z}^g = \varnothing.$$

(ii) Sei $m \geq 1$ nicht von der Form $\{2^a 3^\ell : a \in \{0,1\}$ und $\ell \in \mathbb{N}_0\}$. Weiter gelte $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$. Dann gilt

$$\{\zeta_m + 3\beta : \beta \in \mathcal{O}_K\} \cap \mathcal{Z}^g = \varnothing.$$

An dieser Stelle sei nochmal angemerkt, dass nach Satz 2.11 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ gilt.

Korollar 5.9. *Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $g(1) = 1$ und $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$. Dann gilt für alle primitiven Einheitswurzeln ζ_m mit $m \geq 3$ und $n \geq 1$, dass $P_n^g(\zeta_m + 6\beta) \neq 0$ für alle $\beta \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$.*

Heim und Neuhauser präsentierten außerdem offene Fragen und Impulse für weitere Forschung [15, s. 7-8]. Diese beschreiben wir im Folgenden:

(i) **Ergebnisse von Żmija.** Es wäre interessant herauszufinden, welche Verbindung Satz 3.4 von Żmija zu Satz 3.14 hat. Eine Teilantwort gibt Beispiel 3.16.

(ii) **Nullstellen auf dem Einheitskreis.** Die Sätze 3.4, 3.14 und Korollar 2.25 geben uns bereits einige Aussagen zu den Einheitswurzeln als Nullstellen von P_n^g. Doch wie sieht es im Fall $g(3) \equiv 2 \pmod 3$ aus? Und gibt es Nullstellen auf dem Einheitskreis, die keine Einheitswurzeln sind (siehe auch Vermutung 4.9)? Da $A_n^g \in \mathbb{Z}[X]$ und normiert ist, müssen Nullstellen algebraisch ganz sein.

(iii) **Dedekind-Kummer Ansatz.** Der in Kapitel 2 verwendete Ansatz kann prinzipiell dazu genutzt werden weitere Nullstellen auszuschließen. Bestimmen Sie dazu geeignete algebraische ganze Zahlen α (wie zum Beispiel die primitiven m-ten Einheitswurzeln der Ordnung größer 2) mit $P_n^\sigma(\alpha) \neq 0$. Und analysieren Sie für den Zahlkörper $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ einerseits die Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$ für $p \in \{2, 3, 5\}$ und andererseits die irreduziblen Faktoren von $Min_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ modulo p. Variieren Sie anschließend α zu einer anderen algebraisch ganzen Zahl β, sodass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ gilt und der Index $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\beta]]$ kontrolliert werden kann (vgl. Dedekind-Kummer-Satz 2.17 in Abschnitt 2.1).

(iv) **Streckung des Einheitskreises.** Sei K ein Zahlkörper. Der Kreis mit Radius $r \in \mathcal{O}_K$ ist gegeben durch

$$\mathbb{U}_r := \{rz \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{U}_r$, sodass $P_n^\sigma(\alpha) \neq 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

6 Fazit

In Kapitel 1 wurde die Familie der D'Arcais Polynome P_n als eine Verallgemeinerung der Partitionsfunktion eingeführt. Es wurden grundlegende Eigenschaften beleuchtet, wie der Zusammenhang zur Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} = exp(z\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)\frac{q^n}{n})$$

und die rekusive Formel

$$P_n(z) = \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)P_{n-k}(z), \quad P_0(z) = 1.$$

Mit Hilfe der rekusiven Formel wurden folgende (bereits bekannten) notwendigen Kriterien für Nullstellen α von P_n hergeleitet:

$$\begin{aligned}&(i) \quad \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)},\\ &(ii) \quad \alpha \notin \mathbb{R}_{>0},\\ &(iii) \quad P_n(\overline{\alpha}) = 0.\end{aligned}$$

Weiter wurde zum einen für Nullstellen α von P_n gezeigt, dass $\overline{Min_\alpha} \in \mathbb{F}_p[z]$ (das Polynom, welches durch die Reduktion der Koeffizienten modulo p von Min_α entsteht) für $p \in \{2,3\}$ eine bis auf Reihenfolge eindeutige Linearfaktorzerlegung besitzt. In Kapitel 2 wurde zum anderen nachgewiesen, dass für jede primitive m-te Einheitswurzel ζ_m und Primzahl p eine Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

existiert, wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ allesamt Trägheitsgrad f_p^* haben. Dabei gilt außerdem

$$f_2^* = f_3^* = 1 \quad \Rightarrow \quad m \leq 2.$$

Damit war der Weg für den neuen Beweis von Satz 2.20 (s. Abschnitt 2.2) geebnet. Es wurde Satz 2.17 (s. Abschnitt 2.1) von Dedekind-Kummer auf ζ_m mit $m \geq 3$ angewandt, wobei die Voraussetzung $p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$ wegen $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ für alle $p \in \mathbb{P}$ erfüllt ist (vgl. Bemerkung 2.12). Dies lieferte eine Korrespondenz zwischen der Zerlegung von $\overline{Min_\alpha}$ und $p\mathcal{O}_K$. Unter der Annahme von $P_n(\zeta_m) = 0$ folgte aufgrund der Linearfaktorzerlegung von $\overline{Min_\alpha}$, dass wegen besagter Korrespondenz die Eigenschaft $f_2^* = f_3^* = 1$ und daher $m \leq 2$ gelten muss. Durch diesen Widerspruch zur Annahme folgte schließlich $P_n(\zeta_m) \neq 0$ für alle $m \geq 3$. Im Anschluss wurde $P_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ gezeigt, wodurch 1 als Nullstelle nicht in Frage kommt. Schließlich wurde der Fall $z = -1$ mit Eulers Pentagonalzahlensatz 2.23 abgehandelt. Aus diesem folgt

$$P_n(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ ist keine Pentagonalzahl.}$$

Satz 2.20 wurde in Kapitel 3 auf P_n^g für $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(1) = 1$ und $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ ausgeweitet (Satz 3.14). Entscheidend dabei war, dass sich $n!P_n^g$ ähnlich wie $n!P_n$ verhält und Min_α für Nullstellen α von P_n^g über $\mathbb{F}_2[z]$ und $\mathbb{F}_3[z]$ für $g(3) \not\equiv 2 \pmod 3$ in Linearfaktoren zerfällt. Dadurch konnte die gleiche Beweistechnik verwendet werden. Satz 3.14 wurde anschließend mit Satz 3.4 von Żmija verglichen (ein ähnlicher Satz mit anderen Forderungen an g). Dabei wurde die Existenz eines Falls gezeigt, in dem Satz 3.14 angewandt werden kann, jedoch Satz 3.4 nicht (vgl. Beispiel 3.16). Ferner wurde begründet, warum ein umgekehrtes Beispiel (falls eins existiert) nicht leicht zu finden ist. Mit Beispiel 3.16 wurde die offene Frage in welcher Verbindung Satz 3.14 zu Satz 3.4 steht (vgl. [15, s. 7]) teilweise beantwortet. Am Ende von Kapitel 3 wurde auf die Verbindung von P_n^g zu assoziierten Laguerre-Polynomen durch

$$P_n^{id}(z) = \frac{z}{n} L_{n-1}^{(1)}(-z).$$

hingewiesen und einige Ergebnisse präsentiert (s. Abschnitt 3.3).

Kapitel 4 behandelte die Nullstellenverteilung von P_n. Dabei wurden Eigenschaften ausgewählter Nullstellen in verschiedenen Latex-Plots visualisiert und analysiert. Die Nullstellenbestimmung von P_n bis $n = 500$ mit der Software Wolfram Mathematica (Wolfram 14.1) vom Unternehmen Wolfram Research war Grundlage für die Plots und Berechnungen. Dabei ergaben sich kleinere Ergebnisse wie Korollar 4.8 und 4.18, sowie zwei Vermutungen:

(i) Die betragsgrößte Nullstelle von P_n ist stets reell.

(ii) Die Absolutzahl echt komplexer Nullstellen steigt durchschnittlich für wachsendes n und P_n besitzt für $n \geq 34$ mindestens eine echt komplexe Nullstelle.

Weiter wurde die von Heim und Neuhauser entdeckte Schranke $s_n = 9,7226 \cdot (n-1)$ für den Betrag von Nullstellen vorgestellt. Sowie Ihre Vermutungen 4.2 und 4.9:

(i) $\frac{P_n(z)}{z}$ ist ein Hurwitz-Polynom und die Nullstellen sind einfach.

(ii) Sei $P_n(z) = 0$ mit $|z| = 1$, dann ist $z = -1$.

Zum Schluss wurde in Kapitel 5 ein Ausblick gegeben. Die Verbindung von P_n zur Dedekindschen Etafunktion $\eta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\eta(\omega)^{-z} = q^{-\frac{z}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-z} = q^{-\frac{z}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)q^n, \quad q := e^{2\pi i\omega}$$

wurde benannt, sowie ein grober Überblick über den Forschungsstand zu Potenzen η^r mit $r \in \mathbb{Z}$ gegeben und offene Fragen benannt, wie z.B. die Existenz von Nullstellen für η^{12}, η^{24} und η^{48} (vgl. Abschnitt 5.1). Anschließend wurde in Abschnitt 5.2 ein Einblick in den kürzlich eingereichten Artikel [15] von Heim und Neuhauser über Nullstellen der D'Arcais Polynome gegeben. Anlass war es, Satz 3.14 in den Kontext des aktuellen Forschungsstands einzuordnen und die neuesten Erkenntisse zu präsentieren, insbesondere die Idee, die Beweistechnik von Satz 3.14 zum Ausschließen weiterer Nullstellen zu nutzen.

Die Arbeit hat mir gezeigt, dass die D'Arcais Polynome weitreichende Verbindungen in der Mathematik haben und die Nullstellenverteilung durch den Bezug zur Dedekindschen Etafunktion besonders interessant ist. Jene ist allerdings schwer zu erfassen, wie die zahlreichen offenen Vermutungen belegen (s. Kapitel 5). Die Visualisierung der Nullstellen durch Plots war sehr hilfreich, um für ausgewählte n Eigenschaften von P_n herzuleiten (s. Kapitel 4). Es wäre interessant herauszufinden, wie nah (betraglich) echt komplexe Nullstellen für wachsendes n an die Schranke von Heim und Neuhauser heranrücken (s. s_x in Abbildung 5) und ob diese durch eine (deutlich) präzisere lineare Funktion abschätzbar sind. Hierzu könnte man die Beweistechnik aus [14] auf potenzielle Nutzbarkeit analysieren. Ein überraschendes Ergebnis war Korollar 4.18 (s. Abschnitt 4.3). Man würde intuitiv erwarten, dass das Minimum von d_n im letzten Intervall liegt. Hier könnte man weitere Intervalle untersuchen.

Literatur

[1] G. E. Andrews. *The Theory of Partitions*, volume 2 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1976.

[2] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1976.

[3] H. Cohen and F. Strömberg. *Modular Forms: A Classical Approach*, volume 179 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 2017.

[4] A. C. Cojocaru and M. R. Murty. *An Introduction to Sieve Methods and Their Applications*, volume 66 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[5] B. G. S. Doman. *The Classical Orthogonal Polynomials*. World Scientific, Singapore, 2016.

[6] E. Freitag and R. Busam. *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 4 edition, 2006.

[7] G.-N. Han. The Nekrasov-Okounkov hook length formula: refinement, elementary proof, extension and applications. *Annales de l'Institut Fourier*, 60(1):1–29, 2010.

[8] W. Hart, F. Johansson, and S. Pancratz. FLINT: Fast Library for Number Theory, version 2.4.0. `http://flintlib.org/`, 2013.

[9] W. B. Hart. FLINT: Fast library for number theory: an introduction. In K. Fukuda, J. van der Hoeven, M. Joswig, and N. Takayama, editors, *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Software (ICMS'10)*, volume 6327 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 88–91, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer-Verlag.

[10] B. Heim, F. Luca, and M. Neuhauser. On cyclotomic factors of polynomials related to modular forms. *The Ramanujan Journal*, 48(3):445–458, 2019.

[11] B. Heim, F. Luca, and M. Neuhauser. Recurrence relations for polynomials obtained by arithmetic functions. *International Journal of Number Theory*, 15(6):1291–1303, 2019.

[12] B. Heim and M. Neuhauser. Log-concavity of recursively defined polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 22(1):Article 19.1.5, 2019.

[13] B. Heim and M. Neuhauser. Horizontal and vertical log-concavity. *Research in Number Theory*, 7:18, 2021.

[14] B. Heim and M. Neuhauser. Estimate for the largest zeros of the D'arcais polynomials. *Research in the Mathematical Sciences*, 11(1):1–10, 2024.

[15] B. Heim and M. Neuhauser. On the non-vanishing of the D'arcais polynomials. arXiv preprint, 2025. arXiv:2509.06123v1, accessed 07 September 2025.

[16] B. Heim, M. Neuhauser, and R. Tröger. Zeros of recursively defined polynomials. *Journal of Difference Equations and Applications*, 26(4):510–531, 2020.

[17] B. Heim, M. Neuhauser, and A. Weisse. Records on the vanishing of Fourier coefficients of powers of the Dedekind eta function. *Research in Number Theory*, 4:32, 2018.

[18] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Wiesbaden, 14 edition, 2001.

[19] H. Hida and Y. Maeda. Non-abelian base change for totally real fields. *Pacific Journal of Mathematics*, 181(3):189–217, 1997. Special Issue: Olga Taussky-Todd in memoriam.

[20] M. Hien. *Algebra.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2021.

[21] G. Israel. FLORES D'ARCAIS, Francesco. In *Dizionario Biografico degli Italiani*, volume 48. Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1997.

[22] D. H. Lehmer. The vanishing of Ramanujan's function $\tau(n)$. *Duke Mathematical Journal*, 14(2):429–433, 1947.

[23] A. Leutbecher. *Zahlentheorie: Eine Einführung in die Algebra.* Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

[24] N. Nekrasov and A. Okounkov. Seiberg-Witten theory and random partitions. In P. Etingof, V. S. Retakh, and I. M. Singer, editors, *The Unity of Mathematics: In Honor of the Ninetieth Birthday of I. M. Gelfand*, volume 244 of *Progress in Mathematics*, pages 525–596. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[25] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.

[26] K. Ono and S. Robins. Superlacunary cusp forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(4):1021–1029, 1995.

[27] A. Schmidt. *Einführung in die algebraische Zahlentheorie.* Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[28] I. Schur. Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 165:52–58, 1931.

[29] J.-P. Serre. Sur la lacunarité des puissances de η. *Glasgow Mathematical Journal*, 27:203–221, 1985.

[30] J. B. Westbury. Universal characters from the Macdonald identities. *Advances in Mathematics*, 202(1):50–63, 2006.

[31] B. Żmija. Unusual class of polynomials related to partitions. *The Ramanujan Journal*, 62(4):1069–1080, 2023.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit D'Arcais Polynome selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten fremden Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte Druckfassung der eingereichten elektronischen Fassung vollständig entspricht.

Köln den 29.09.2025	Tobias Krischer
Ort, Datum	Unterschrift